# Olimpiada Internacional de Matemáticas

Este verano cuatro alumnos de la Universidad Pontificia Comillas-ICAI hemos participado –como se llevaba haciendo en los últimos cinco años– en la International Mathematics Competition for University Students (IMC). El equipo de ICAI lo componían Pedro Ciller y Alberto Orgaz, ambos de 4º de industriales e Isabel Garro y Manuel Peña, de 3º de industriales (cuando fueron eran de 3º y 2º respectivamente).

Esta XVII edición de la olimpiada se celebró en Blagoevgrad (Bulgaria) entre el 24 y el 30 de julio, y en ella han participado 328 estudiantes de 90 universidades y 43 países. El equipo español estaba formado por 26 estudiantes de 8 universidades (aparte de la Universidad Pontificia Comillas, estuvieron representadas las Universidades de Alicante, Autónoma de Madrid, Complutense de Madrid, Politécnica de Cataluña, Politécnica de Madrid, Valencia y Zaragoza). La prueba consistía en resolver 10 problemas sobre álgebra, análisis real y complejo, geometría y combinatoria, distribuidos en dos días. Cada problema se puntuaba sobre diez puntos y la puntuación total era la suma de los diez problemas. El Jurado Internacional, compuesto por los líderes de las diferentes universidades, fue el encargado de seleccionar los problemas para las pruebas así como de fijar los baremos para su posterior corrección.

El programa de la competición fue el siguiente: después de un primer día de aclimatación –debido a que venía gente de todo el mundo–, el segundo día había un examen de cinco horas por la mañana con una tanda de cinco problemas ordenados de más fáciles a más complejos. Al día siguiente volvíamos a tener otra tanda de problemas, y al siguiente teníamos una visita por Bulgaria. El penúltimo día era la ceremonia de clausura, en la que se repartían los premios.

Gracias a la colaboración del profesor de ICAI Javier Rodrigo, que fue el encargado de nuestra preparación –proponiéndonos problemas de preparación y corrigiéndolos posteriormente– este año hemos mejorado con creces los resultados del año pasado, consiguiendo una Honorable Mention (Pedro) y tres Certificates (Isabel, Alberto y Manuel), dejando a la Universidad en el puesto 80 entre las universidades participantes, todo un éxito teniendo en cuenta que la gran mayoría de participantes eran estudiantes de matemáticas.

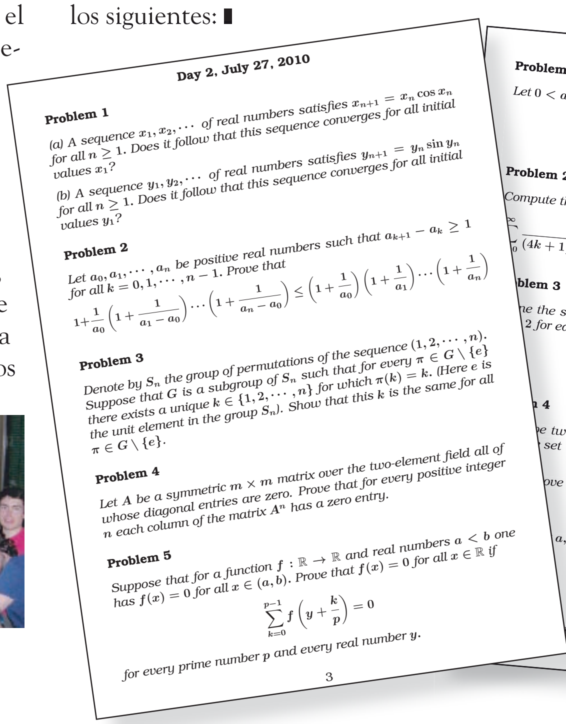
Queremos hacer constar nuestro agradecimiento a Ángela Jiménez, directora del Departamento de Matemática Aplicada de la Escuela Técnica Superior de Ingeniería-ICAI, por organizar nuestra participación en la competición y a la Escuela y al Colegio Nacional de Ingenieros de ICAI por haber subvencionado dicha participación.

Los problemas propuestos fueron los siguientes: ▮

Manuel Peña, Pedro Ciller, Alberto Orgaz e Isabel Garro (izq a dcha)

Visita por Blagoevgrad.

Equipo español.



**Day 2, July 27, 2010**

**Problem 1**

(a) A sequence $x_1, x_2, \cdots$ of real numbers satisfies $x_{n+1} = x_n \cos x_n$ for all $n \geq 1$. Does it follow that this sequence converges for all initial values $x_1$?

(b) A sequence $y_1, y_2, \cdots$ of real numbers satisfies $y_{n+1} = y_n \sin y_n$ for all $n \geq 1$. Does it follow that this sequence converges for all initial values $y_1$?

**Problem 2**

Let $a_0, a_1, \cdots, a_n$ be positive real numbers such that $a_{k+1} - a_k \geq 1$ for all $k = 0, 1, \cdots, n-1$. Prove that

$$1+\frac{1}{a_0}\left(1+\frac{1}{a_1-a_0}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{a_n-a_0}\right) \leq \left(1+\frac{1}{a_0}\right)\left(1+\frac{1}{a_1}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{a_n}\right)$$

**Problem 3**

Denote by $S_n$ the group of permutations of the sequence $(1, 2, \cdots, n)$. Suppose that $G$ is a subgroup of $S_n$ such that for every $\pi \in G \setminus \{e\}$ there exists a unique $k \in \{1, 2, \cdots, n\}$ for which $\pi(k) = k$. (Here $e$ is the unit element in the group $S_n$). Show that this $k$ is the same for all $\pi \in G \setminus \{e\}$.

**Problem 4**

Let $A$ be a symmetric $m \times m$ matrix over the two-element field all of whose diagonal entries are zero. Prove that for every positive integer $n$ each column of the matrix $A^n$ has a zero entry.

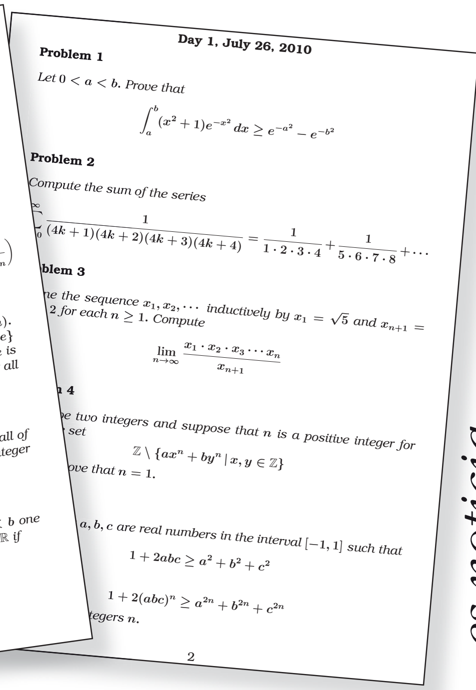
**Problem 5**

Suppose that for a function $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ and real numbers $a < b$ one has $f(x) = 0$ for all $x \in (a, b)$. Prove that $f(x) = 0$ for all $x \in \mathbb{R}$ if

$$\sum_{k=0}^{p-1} f\left(y + \frac{k}{p}\right) = 0$$

for every prime number $p$ and every real number $y$.

3



**Day 1, July 26, 2010**

**Problem 1**

Let $0 < a < b$. Prove that

$$\int_a^b (x^2+1)e^{-x^2}\,dx \geq e^{-a^2} - e^{-b^2}$$

**Problem 2**

Compute the sum of the series

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(4k+1)(4k+2)(4k+3)(4k+4)} = \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} + \frac{1}{5\cdot 6\cdot 7\cdot 8} + \cdots$$

**blem 3**

ne the sequence $x_1, x_2, \cdots$ inductively by $x_1 = \sqrt{5}$ and $x_{n+1} =$
2 for each $n \geq 1$. Compute

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdots x_n}{x_{n+1}}$$

**n 4**

e two integers and suppose that $n$ is a positive integer for
set

$$\mathbb{Z} \setminus \{ax^n + by^n \mid x, y \in \mathbb{Z}\}$$

ove that $n = 1$.

$a, b, c$ are real numbers in the interval $[-1, 1]$ such that

$$1 + 2abc \geq a^2 + b^2 + c^2$$

$$1 + 2(abc)^n \geq a^{2n} + b^{2n} + c^{2n}$$

tegers $n$.

2