Los tensores y la Mecánica Relativista (I)

Palabras clave: Escalares, vectores, tensores, clasificación de los tensores, operaciones con tensores, espacio de Euclides, espacio-tiempo, relatividad especial, relatividad general.

Resumen:

Se clasifican las magnitudes que intervienen en general en la Física de la Naturaleza, y en particular en la Ingeniería, en escalares, vectoriales y tensoriales. Esta clasificación tiene en cuenta los datos necesarios para que cada una de ellas esté definida con precisión mediante ciertos valores en cada uno de los n ejes de un sistema de referencia en el espacio de n dimensiones, en el que opere la magnitud en estudio (n = 3 en el espacio de Euclides, en el que trabaja la Mecánica Clásica de Galileo y de Newton y n = 4 en el espacio-tiempo de Minkowski, propio de la Mecánica Relativista). Se estudia la manera cómo se transforman los valores de las componentes de los vectores o de los tensores al cambiar el sistema de referencia al que se vinculen, también se analizan distintos tipos de tensores y se dedica una parte importante del artículo a estudiar, con cierto detalle, las operaciones que se pueden realizar con los tensores.

Key words: *escalars, vectors, tensors, tensors´ classification, pperations with tensors, Euclides´ space, space-time, special relativity, general relativity.*

Abstract:

Magnitudes involved in the Physics of the Nature in general, and in Engineering specifically, are classified in "escalars, vectors and tensors". This classification takes into account all the necessary data to precisely define each one of these magnitudes through specific values in each one of the n axis of a reference system in an n-dimension space in which the magnitude operates (n = 3 in Euclides space, where Classical Mechanics of Newton and Galileo work and n = 4 in the Minkowski space-time, related to the "Einstein´Mechanics"). We study how the values of the components of the vectors or the tensors change when we change the reference system; it is also analyzed different type of tensors and –in an important portion of the article- the operations that can be done with tensors.

Luis García Pascual

Doctor Ingeniero Electromecánico del ICAI (Promoción 1957). Diplomado en Organización Industrial. Profesor Emérito de la ETSI ICAI (UPC).

Introducción

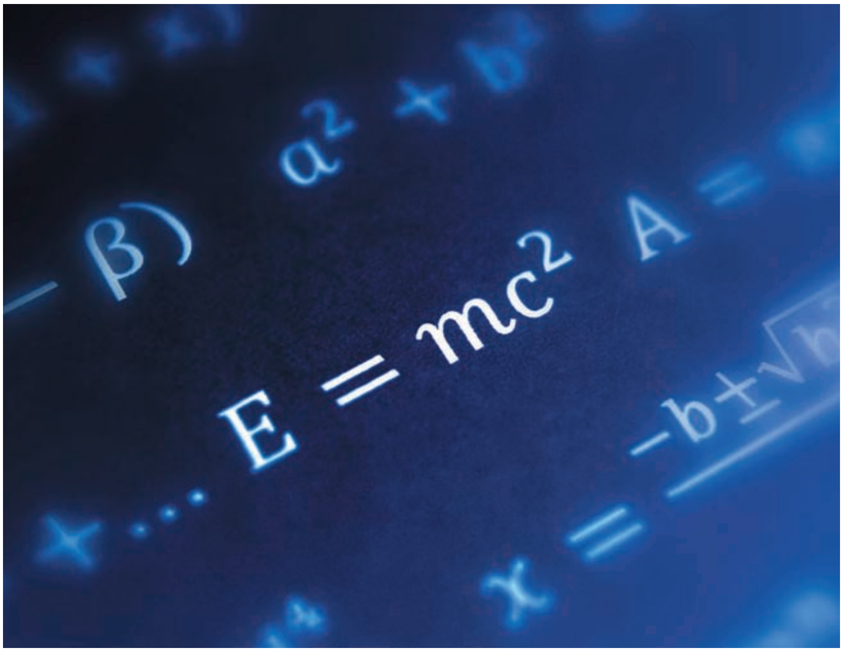
Para la Mecánica Clásica, en la que tanto el tiempo como el espacio tienen carácter absoluto (todas las separaciones espaciales y todos los intervalos temporales se consideran del mismo valor para todos los observadores), las magnitudes que intervienen en general en Física, y en particular en Ingeniería, se clasifican teniendo en cuenta, únicamente, la información necesaria para que cada una de ellas esté definida y cuantificada con precisión. Con este único criterio, la Mecánica de Galileo y de Newton considera que dichas magnitudes pueden ser:

Escalares

Son aquellas magnitudes que, como una temperatura, o como un tiempo, o como una masa, o como una distancia, o como una superficie, o como un volumen, o como…, únicamente precisan para su completa definición un número que cuantifique su valor en la unidad adecuada para medirla. Esta unidad será múltiplo o submúltiplo de una unidad fundamental, según las circunstancias particulares en cada caso concreto (tan lógico es expresar en micras la separación entre el interior de las camisas de los cilindros de un motor de automóvil y el exterior de los pistones, que a lo largo de ellas se desplazan, como medir en km la distancia entre dos ciudades o como calcular en años-luz la distancia entre dos estrellas). El valor de una magnitud escalar se considera el mismo para todos los observadores situados en distintos sistemas de referencia, independientemente, de las posibles velocidades o las posibles aceleraciones relativas que pueda haber entre ellos.

Vectoriales

Se consideran como tales aquellas magnitudes que, como una velocidad, o como una fuerza, o como un desplazamiento, o como un giro, o como..., necesitan, para ser conocidas con total precisión, que se explicite su valor, su dirección y su sentido. Estas magnitudes vectoriales pueden valorarse de dos maneras diferentes:



De forma geométrica

Considerando el vector en sí mismo, mediante un segmento de longitud proporcional a su valor, a lo largo de su dirección (definida por una línea) y con una flechita indicando su sentido. En este trabajo vamos a escribirlos en negrita.

De manera analítica o algebraica

De tal manera que, una vez subordinado un vector $\vec{\mathbf{v}}$ a un sistema de referencia definido x, dicho vector esté determinado por n componentes escalares $\mathbf{v_i}$ (una sobre cada uno de los n ejes del sistema de referencia, previamente establecido, en el espacio de n dimensiones donde opere la magnitud vectorial en estudio). Si se considera, como el valor para cada una de dichas componentes, la longitud de la proyección normal del vector sobre cada uno de los ejes del sistema de referencia (se habla, en este caso y, como veremos más tarde, de las componentes covariantes), es evidente que los valores de estas componentes se transforman al cambiar el sistema de referencia al que el vector se vincule; es decir, si se abandona el sistema de referencia inicial x, y se subordina el vector a otro sistema de referencia $\bar{\mathbf{x}}$ las componentes covariantes, para el mismo vector, se transforman de tal manera que, en cada eje i (del nuevo sistema $\bar{\mathbf{x}}$) aparece una componente de valor

$$\bar{v}_i = \sum_n v_k \, a^k_{.i}$$

siendo $\mathbf{v_k}$ cada una de las componentes del vector en el sistema de referencia inicial x y $\mathbf{a^k_{.i}}$ los cosenos de los ángulos formados por el eje i del nuevo sistema $\bar{\mathbf{x}}$ con cada uno de los ejes k del sistema x.

Es interesante recordar que, además de las ya apuntadas componentes covariantes para valorar un vector, éste podría estar referido al mismo sistema de referencia mediante otro tipo de componentes (las componentes contravariantes). Si se tiene presente esta doble posibilidad, podemos encontrarnos ante:

1. Vectores contravariantes o también llamados de valencia contravariante. Están determinados por sus componentes contravariantes siendo cada una de ellas la longitud de los sucesivos segmentos, en las correspondientes direcciones de los ejes de referencia, de tal forma que la separación entre dos puntos O y P esté dada por la longitud de la línea quebrada de extremos O y P y lados paralelos a los ejes del sistema de referencia. Estos mismos segmentos, sobre cada uno de los correspondientes ejes, serán las componentes contravariantes del vector $\overrightarrow{\mathbf{OP}}$. Las componentes contravariantes se indican mediante índices arriba y el valor de cada una de ellas en un sistema $\bar{x}$, está determinado por el valor de su homóloga en el otro sistema x obtenido mediante la expresión $\bar{v}^i = v^j a^j_{.i}$, siendo v^j la componente a trasladar desde un eje del sistema x a otro eje del sistema $\bar{x}$ y $a^j_{.i}$ el coseno del ángulo que forman los ejes correspondientes en uno y otro de los dos sistemas de referencia.

2. Vectores covariantes o también llamados de valencia covariante. Están determinados por sus componentes covariantes siendo cada una de ellas, como ya se ha dicho, la proyección normal del vector sobre cada uno de los ejes del sistema de referencia al que se subordine el vector. Las componentes covariantes se indican mediante índices abajo y el valor de cada una de ellas en un sistema es una función de todas y cada una de las componentes covariantes en el otro sistema de acuerdo con la ya citada ley

$$\bar{v}_i = \sum_n v_k\, a^k_{.i}$$

Aplicando esta ley, y según la convención de la suma para los índices iguales, tendremos para la componente covariante en cada uno de los ejes del nuevo sistema de referencia, el valor $\bar{v}_i = v_1 a^1_{.i} + v_2 a^2_{.i} + v_3 a^3_{.i}$.

Obsérvese que en los sistemas de referencia cartesianos (de ejes rectilíneos y ortonormales), las componentes contravariantes coinciden con las componentes covariantes, aunque la diferencia entre los conceptos de vector contravariante y de vector covariante deban seguir teniéndose en cuenta para otras posibles aplicaciones.

Todo lo anterior puede expresarse más explícitamente diciendo que, por ejemplo, en el espacio tridimensional de Euclides, las tres componentes covariantes del vector $\vec{v}$ en el sistema de referencia x serán v_1, v_2, v_3 y que las tres componentes también covariantes del mismo vector en el sistema de referencia $\bar{x}$ valdrán $\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3$. Los valores de ambos conjuntos de componentes covariantes estarán relacionados en forma matricial mediante la expresión:

$$\begin{bmatrix}\bar{v}_1\\ \bar{v}_2\\ \bar{v}_3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}v_1\\ v_2\\ v_3\end{bmatrix} \qquad [1]$$

sabiendo que esta ecuación matricial se puede escribir, en forma condensada, de la forma:

$$\bar{v}_i = a_{ij} v_j \qquad [2]$$

expresión en la que:

$$a_{ij} = \frac{\partial \bar{x}_i}{\partial x_j} \qquad [3]$$

siendo i, j = 1, 2, 3.

En la ecuación [3] el segundo miembro representa cada uno de los cosenos de los ángulos formados por cada eje i del sistema de referencia $\bar{X}$ con cada uno de los ejes del otro sistema x. Por otro lado, en el primer miembro de la expresión [2], el subíndice i toma sucesivamente los valores 1, 2 y 3 y el subíndice j, repetido en el segundo miembro y de acuerdo con la interpretación de los índices repetidos de Einstein, no representa un único valor para cada valor de i, sino la suma de los tres valores $a_{i1}u_1 + a_{i2}u_2 + a_{i3}u_3$.

Tensoriales

Se entiende por magnitudes tensoriales los conceptos físicos que, como la distribución de tensiones o la distribución de deformaciones en un sólido elástico, o como la distribución de momentos de inercia en un cuerpo másico, o como la métrica en cada punto de un espacio, o como la curvatura en cada punto de una superficie, o como la distribución de la masa-energía en cada punto de un continuo, o como..., sea necesario, para su especificación correcta, conocer tantos vectores T_i, subordinados a un sistema de referencia definido x, como dimensiones n tenga el espacio en que se supone aplicado el tensor.

Los vectores T_i, componentes del tensor, se supone que se transforman al cambiar de sistema de referencia como se ha visto, en el apartado anterior, que se transforman las componentes covariantes v_i de un vector $\vec{v}$. Es decir, al cambiar de sistema de referencia, aquellos vectores se transforman siguiendo la ley:

$$\bar{T}_i = \sum_n T_k\, a^k_{.i} \qquad [4]$$

siendo T_k cada uno de los vectores componentes del tensor en el sistema de referencia inicial x y $a^k_{.i}$ los cosenos de los ángulos formados, como consecuencia del cambio de sistema de referencia, por cada uno de los ejes i del nuevo sistema $\bar{x}$ con cada uno de los ejes k del sistema inicial x.

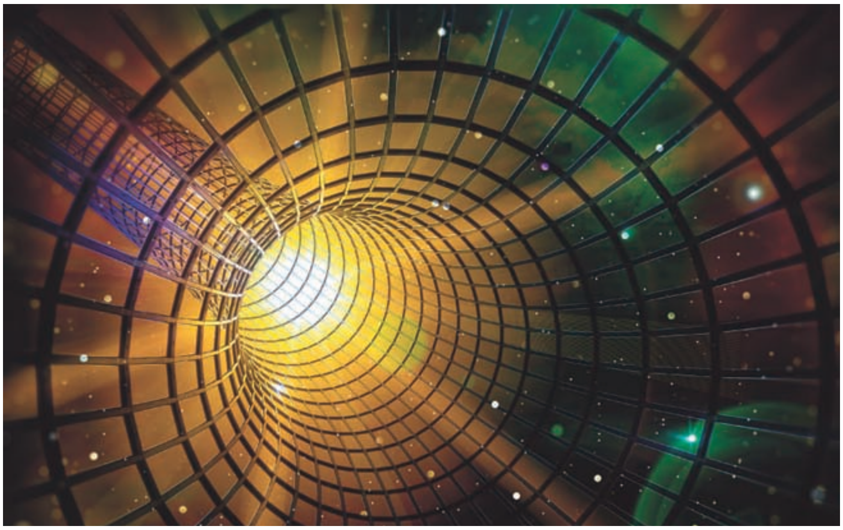
Por otra parte, en el cálculo tensorial, todo vector y en cualquier sistema de referencia, se cuantifica, de acuerdo con la manera analítica de representar un vector, por n escalares y, en consecuencia, toda magnitud tensorial básica (determinada por n vectores) tendrá n^2 escalares dispuestos según una matriz cuadrada de n filas y n columnas. En esta matriz, cada fila representará las n componentes escalares de cada uno de los n vectores según cada uno de los ejes del nuevo sistema de referencia.

Como consecuencia, las n^2 componentes del tensor, al trasladarlo desde el sistema de referencia x al sistema de referencia $\bar{x}$ vendrán dadas por:

$$\bar{T}_{ik} = \sum_{jh} T_{jh}\, a^j_{.i}\, a^h_{.k} \qquad [5]$$

Se puede considerar que las magnitudes escalares y las magnitudes vectoriales son casos particulares de las magnitudes tensoriales y tratarlas como entes realmente tensoriales de n^m componentes. Bajo esta consideración, cuando se tratara de trabajar con una magnitud escalar, sería m=0 y su tensor asociado tendría $n^0 = 1$ componente, cuando se manejara una magnitud vectorial, el valor de m sería 1 y su tensor correspondiente tendría $n^1 = n$ componentes escalares y, cuando la magnitud a tener en cuenta fuera un tensor propiamente dicho, este tensor tendría n^2 componentes escalares como sucede en la ecuación [5].

El valor de m determina el **orden o rango** del tensor y, por ello, puede decirse que un escalar es un tensor de rango nulo, que un vector es un tensor de primer orden y que, al estudiar diversos casos de magnitudes propiamente tensoriales, nos encontraremos con tensores de rango doble. Es frecuente la presencia de tensores de orden superior a dos como ocurre, en el caso más intuitivo, al cambiar cualquier



magnitud propiamente tensorial de sistema de referencia; ya que, al pasar por ejemplo un tensor doble del sistema x a un nuevo sistema de referencia $\bar{x}$, los n tensores dobles darán origen a un tensor triple, que tendrá n^2 vectores $\mathbf{T_{jh}}$ y n^3 componentes escalares T_{jhr}.

A estas alturas de nuestro trabajo ya ha de resultar evidente que, al pasar los n^2 vectores $\mathbf{T_{jh}}$ al nuevo tensor triple se representen, según la expresión [5], bajo la forma:

$$\overline{\mathbf{T}}_{\mathbf{ik}} = \textstyle\sum_{jh} \mathbf{T_{jh}} a^{j}_{.i}\, a^{h}_{.k} \qquad [6]$$

y que las n^3 componentes escalares T_{jhr} se obtengan mediante la expresión:

$$\overline{T}_{iks} = \textstyle\sum_{jhr} T_{jhr} a^{j}_{.i}\, a^{h}_{.k} a^{r}_{.s} \qquad [7]$$

Es evidente que, a partir de este tensor de orden 3, se pueda pasar a un tensor de orden 4 y, a partir de éste, a un tensor de orden 5 y, de la misma manera, a tensores de órdenes sucesivos. También, como veremos más tarde, puede cambiar el rango de un tensor simplemente al derivarlo respecto a cada una de las variables o al efectuar determinadas operaciones normales en Cálculo Tensorial.

Los tensores más conocidos (tensor de tensiones, tensor de deformaciones, tensor de inercia, tensor métrico…) son de orden dos y, por supuesto, estos tensores en el espacio tridimensional de Euclides tendrán $3^2 = 9$ componentes. No obstante, en muchos casos aparecen tensores de órdenes muy distintos como ocurre, por ejemplo, al calcular el tensor de curvatura en un punto de una superficie no plana (una esfera, por ejemplo); en este caso, se obtiene un tensor de cuarto orden que, al quedar las dimensiones sobre la superficie esférica reducidas a dos (la longitud y la latitud), dicho tensor tendrá $2^4 = 16$ componentes.

En general, un tensor de orden m estará representado por $\mathbf{n}^m$ componentes escalares o por $\mathbf{n}^{m-1}$ vectores o por $\mathbf{n}^{m-2}$ tensores dobles.

Algunos tensores interesantes en el espacio de Euclides

Para familiarizar al lector con el uso de los tensores y con la simbología en ellos empleada, se va a estudiar, en el espacio euclidiano de tres dimensiones y con sistemas de referencia de coordenadas cartesianas, los cuatro tensores siguientes:

a. El llamado Tensor Fundamental de rango dos.

b. El conocido como Tensor de Ricci de tercer orden.

c. El Tensor derivado de un vector en un campo vectorial.

d. El Tensor métrico en un punto del espacio.

Comprendido bien el concepto y las posibilidades de estos tensores, cuando se deban emplear en el espacio cuadrimensional de Riemann (y por lo tanto en la Mecánica de la Relatividad) su manejo resultará, ciertamente, muy intuitivo.

Tensor fundamental en el espacio de Euclides

Es el tensor definido por los tres versores (vectores unitarios) uno sobre cada uno de los ejes del sistema de referencia cartesiano x, y, z. Ahora bien, como en este caso $\mathbf{T_1} = \mathbf{i}$; $\mathbf{T_2} = \mathbf{j}$; $\mathbf{T_3} = \mathbf{k}$, las componentes escalares respectivas de cada uno de estos tres vectores componentes del tensor serán:

$$a_{11} = 1;\ a_{12} = 0;\ a_{13} = 0$$

$$a_{21} = 0;\ a_{22} = 1;\ a_{23} = 0$$

$$a_{31} = 0;\ a_{32} = 0;\ a_{33} = 1$$

Nótese como, si se pasara del sistema de referencia cartesiano a otro sistema cartesiano $\bar{x}$, $\bar{y}$, $\bar{z}$, los tres vectores unitarios se transformarían, de acuerdo con la expresión [4], en

$$\overline{\mathbf{T}}_{\mathbf{i}} = \textstyle\sum_3 \mathbf{T_k}\, a^{k}_{.i}$$

siendo:

1. $\overline{\mathbf{T}}_{\mathbf{i}}$ la suma de las proyecciones de los tres versores $\mathbf{T_k}$ sobre cada uno de los ejes del nuevo sistema de referencia. La suma de estas proyecciones sobre cada eje también resultará en este caso un vector unitario y el conjunto de los tres $\overline{\mathbf{T}}_{\mathbf{i}}$ serán los vectores componentes del tensor en este nuevo sistema.

2. $\mathbf{T_k}$ cada uno de los versores en el sistema de referencia inicial.

3. $a^{k}_{.i}$ el coseno del ángulo que cada uno de los tres ejes del nuevo sistema de referencia $\bar{x}$, $\bar{y}$, $\bar{z}$ forma con el correspondiente eje del sistema de referencia x, y, z.

Es evidente que estos tres vectores $\overline{\mathbf{T}}_{\mathbf{i}}$ están situados sobre sendos ejes del nuevo sistema de referencia también cartesiano, luego los tres son perpendiculares entre sí y, en consecuencia, las componentes escalares respectivas de cada uno de estos tres vectores componentes del tensor (que serán $\bar{a}_{ik}$) se obtendrían como el producto escalar de dos de los tres vectores $\overline{\mathbf{T}}_{\mathbf{i}}$. Es decir:

$$\overline{\mathbf{T}}_{\mathbf{i}} \cdot \overline{\mathbf{T}}_{\mathbf{k}} = \bar{a}_{ik} = \textstyle\sum_{jh} T_{jh} a^{j}_{.i}\, a^{h}_{.k} \qquad [8]$$

Estas componentes escalares, como ocurría con las componentes escalares en el sistema de referencia inicial, valen 1 (si i=k) o valen 0 (cuando i≠k). Por lo tanto, en este tensor fundamental, no cambian las componentes escalares al pasar de un sistema de referencia cartesiano a otro sistema de referencia también cartesiano.

Tensor de Ricci en el espacio de Euclides

En este tensor, en lugar de pensar en un tensor que tenga como vectores componentes los versores sobre cada uno de los ejes de un sistema de referencia cartesiano, se parte de los nueve vectores obtenidos multiplicando vectorialmente entre sí los tres versores sobre dicho triedro de referencia. Estos productos constituyen el siguiente sistema de nueve vectores $\mathbf{T_{ik}} = \mathbf{T_i} \times \mathbf{T_k}$ (siendo i, k = 1, 2, 3). En esta ocasión, por partir de nueve vectores, estamos ante un tensor de orden tres.

Cada uno de estos nueve productos vectoriales (también de valor unitario) tendrá una componente escalar covariante sobre cada uno de los ejes de referencia obtenida, como la proyección del vector considerado sobre cada uno de dichos ejes. Es decir, las tres componentes escalares de cada uno de estos vectores serán, respectivamente, los productos escalares de cada vector en estudio por el vector unitario en cada uno de los tres ejes del sistema de referencia; es decir $\mathrm{T_{ikh}} = (\mathbf{T_i} \times \mathbf{T_k}).\mathbf{T_h}$ (siendo i, k, h = 1, 2, 3).

Es evidente que, si entre estas veintisiete componentes escalares al menos dos subíndices i, k, h fueran iguales, el valor de tal componente sería nulo siendo, en consecuencia, no nulas únicamente aquellas componentes en las que los tres subíndices sean diferentes. Por otro lado, como $\mathbf{T_i}$, $\mathbf{T_k}$, y $\mathbf{T_h}$ son unitarios, todas las componentes escalares no nulas valdrán +1 o bien -1 según que el vector $\mathbf{T_i} \times \mathbf{T_k}$ y el vector $\mathbf{T_h}$ sean coincidentes u opuestos. Es decir:

$$\mathrm{T_{123}} = 1, \qquad \mathrm{T_{231}} = 1, \qquad \mathrm{T_{312}} = 1,$$

$$\mathrm{T_{132}} = -1, \qquad \mathrm{T_{213}} - 1, \qquad \mathrm{T_{321}} = -1$$

Si hacemos el cambio de sistema de referencia desde el triedro cartesiano x, y, z (con los $\mathbf{T_i}$ como vectores componentes del tensor) al triedro también cartesiano $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$ (con los $\overline{\mathbf{T}}_\mathbf{i}$ como los vectores componentes del tensor) e intentamos encontrar la transformación de las componentes escalares $\overline{\mathrm{T}}_{\mathbf{ikh}}$ como consecuencia de este cambio de referencia, se cumple la ecuación [5], lo que confirma que nos encontramos ante un verdadero tensor de tercer orden en el que las componente escalares $\overline{\mathrm{T}}_{\mathbf{ikh}}$ se modifican al cambiar de referencia cartesiana según la ley:

$$\overline{\mathrm{T}}_{\mathbf{ikh}} = \sum_{\mathbf{pqr}} \mathrm{T_{pqr}} a^{\mathrm{p}}_{.\mathrm{i}}\, a^{\mathrm{q}}_{.\mathrm{k}} a^{\mathrm{r}}_{.\mathrm{h}} \qquad [9]$$

El tensor derivado de un vector en el espacio de Euclides

Consideremos, ahora, un vector $\vec{\mathbf{v}}$ función de las coordenadas de cada punto P en el espacio de Euclides. Establecido un sistema de referencia, a cada punto corresponderán las tres coordenadas $\mathbf{x^i}$ y, por lo tanto, el vector estará definido por $\vec{\mathbf{v}} = \mathbf{v}(\mathrm{x^i})$. Pensemos, ahora, en el conjunto de los tres vectores, que conformarán el tensor correspondiente al punto P, formados por las derivadas parciales del vector $\vec{\mathbf{v}}$ respecto a cada una de las coordenadas $\mathbf{x^i}$; es decir:

$$\vec{\mathbf{v}}_\mathbf{i} = \frac{\partial \vec{\mathbf{v}}}{\partial \mathbf{x^i}} \qquad [10]$$

Cada uno de estos tres vectores, en otro triedro de referencia cartesiano $\overline{\mathbf{X}}$, tendrá tres componentes escalares y, en consecuencia, tendremos nueve componentes escalares

$$\frac{\partial \mathbf{v_k}}{\partial \bar{\mathbf{x}}_\mathbf{i}}$$

(k, i = 1, 2, 3) correspondientes al tensor derivado del vector $\vec{\mathbf{v}}$.

En este nuevo sistema de referencia $\bar{\mathrm{x}}$, las antiguas coordenadas del punto P estarán relacionadas con las correspondientes al sistema $\overline{\mathbf{X}}$, mediante las expresiones:

$$\mathrm{x^k} = \mathrm{o^k} + \sum_\mathrm{i} a^{\mathrm{k}}_{.\mathrm{i}}\, \bar{\mathrm{x}}^\mathrm{i} \qquad [11]$$

siendo $\mathrm{o^k}$ cada una de las coordenadas del origen de $\bar{\mathbf{x}}$ respecto al origen de x y $a^{\mathrm{k}}_{.\mathrm{i}}$ el coseno del ángulo formado por el eje $\bar{\mathbf{x}}^\mathbf{i}$ con cada uno de los ejes $\mathbf{x^k}$.

Ahora bien, como $\mathrm{o^k}$ es constante y como $a^{\mathrm{k}}_{.\mathrm{i}}$ es la misma para los tres términos del sumatorio de [11] las componentes de cada vector en el sistema $\overline{\mathbf{X}}$ serán:

$$\frac{\partial \vec{\mathbf{v}}}{\partial \bar{\mathbf{x}}^\mathbf{i}} = \sum_\mathbf{k} \frac{\partial \vec{\mathbf{v}}}{\partial \mathbf{x^k}} \frac{\partial \mathbf{x^k}}{\partial \bar{\mathbf{x}}^\mathbf{i}} = \\ = \sum_\mathbf{k} \frac{\partial \vec{\mathbf{v}}}{\partial \mathbf{x^k}} a^{\mathrm{k}}_{.\mathrm{i}} = \sum_\mathbf{k} \mathbf{v_k}\, a^{\mathrm{k}}_{.\mathrm{i}} \qquad [12]$$

La ecuación [12] demuestra que los tres vectores dan lugar a un tensor de segundo orden (derivado del vector $\vec{\mathbf{v}}$) en el punto P ya que se transforman, al cambiar de sistema de referencia, siguiendo la ecuación [12], que coincide con la ecuación [4], típicamente representativa de los tensores.

El tensor métrico en un punto del espacio de Euclides

Asignemos en el espacio de Euclides a cada punto P, al que correspondan un conjunto de tres coordenadas $\mathbf{x^i}$, el vector $\vec{\mathbf{P}}$, que va del origen del sistema de referencia al punto P, mediante la expresión:

$$\vec{\mathbf{P}} = \mathbf{P}(\mathrm{x^i}) \qquad [13]$$

Los tres vectores $\vec{\mathbf{P}}_\mathbf{i} = \frac{\partial \vec{\mathbf{P}}}{\partial \mathrm{x^i}}$ formados por las derivadas parciales del vector $\vec{\mathbf{P}}$ respecto a cada una de las coordenadas determinan las tres componentes sobre los ejes de referencia.

Para nuestro propósito consideremos en lugar del vector $\vec{\mathbf{P}}$, que va del origen del sistema de referencia al punto P, un vector elemental $\mathbf{d}\vec{\mathbf{P}}$, con origen en $\mathbf{x^i}$ y final en $\mathbf{x^i} + \mathbf{dx^i}$ expresado por:

$$\mathbf{d}\vec{\mathbf{P}} = \sum_\mathbf{i} \frac{\partial \vec{\mathbf{P}}}{\partial \mathbf{x^i}} \mathbf{d\, x^i} \qquad [14]$$

Multiplicando escalarmente $\mathbf{d}\vec{\mathbf{P}}$ por sí mismo obtendremos el cuadrado de la distancia ds entre los dos puntos infinitamente próximos ($\mathrm{x^i}$ y $\mathrm{x^i + dx^i}$) mediante la expresión:

$$\mathbf{d}\vec{\mathbf{P}}.\mathbf{d}\vec{\mathbf{P}} = (\mathrm{ds})^2 = \sum_\mathbf{ik} \mathbf{a_{ik}}\, \mathbf{dx^i x^k} \qquad [15]$$

siendo $\mathrm{a_{ik}} = \mathrm{a_{ki}} = \frac{\partial \vec{\mathbf{P}}}{\partial \mathrm{x^i}} \frac{\partial \vec{\mathbf{P}}}{\partial \mathrm{x^k}}$.

La ecuación [15] es la métrica en el punto P del espacio que, como puede verse, es una forma diferencial cuadrática positiva (tensor) cuyos coeficientes $\sum_{ik} a_{ik}$ constituyen un sistema doble de nueve componentes escalares. Estas componentes son simétricas ya que

$$\frac{\partial \vec{P}}{\partial x^i}\frac{\partial \vec{P}}{\partial x^k} = \frac{\partial \vec{P}}{\partial x^k}\frac{\partial \vec{P}}{\partial x^i}$$

Es trivial comprobar que, en el caso de que el sistema de referencia fuera rectilíneo y ortogonal (cartesiano), ocurriría que este sistema doble de nueve componentes sería:

$$a_{ik} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

y el cuadrado de la distancia entre los dos puntos infinitamente próximos vendría dada por:

$$(ds)^2 = (dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2 \qquad [16]$$

Para determinar la métrica en coordenadas esféricas, haciendo $x^1 = r$, $x^2 = \vartheta$ y $x^3 = \varphi$, es inmediato deducir que:

$$a_{ik} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & r^2\cos^2\vartheta \end{bmatrix}$$

y el cuadrado de la distancia entre los dos puntos infinitamente próximos valdría:

$$(ds)^2 = (dr)^2 + r^2(d\vartheta)^2 + r^2\cos^2\vartheta(d\varphi)^2 \qquad [17]$$

En Mecánica Relativista, por trabajar en el espacio-tiempo cuadrimensional y curvo de Minkowski, el tensor métrico tendrá carácter local (varía de un punto a otro) razón por lo que, en cada punto, sirve para medir vectores elementales en todas las direcciones a partir de las componentes contravariantes $dx^i dx^k$ del vector elemental. La métrica, en este caso, estará determinada por el tensor de los potenciales de Einstein:

$$g_{ik} = \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} & g_{14} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} & g_{24} \\ g_{31} & g_{32} & g_{32} & g_{34} \\ g_{41} & g_{42} & g_{43} & g_{44} \end{bmatrix} \qquad [18]$$

Este tensor es fundamental en la Mecánica Relativista, tanto especial como general, y a su estudio y aplicaciones dedicaremos muchas páginas en un nuevo libro sobre "Relatividad General", en el que estoy trabajando.

Resumen

Para habituar al lector no acostumbrado al uso de los tensores y animarle a sumergirse en el mundo del Análisis Tensorial puede tener interés insistir en que:

• Para relacionar magnitudes escalares basta aplicar el álgebra normal respetando siempre la compatibilidad entre las dimensiones de las magnitudes utilizadas y eligiendo, para cada una de ellas, las unidades más adecuadas. La compatibilidad entre las dimensiones evita cometer, a veces, errores de concepto y puede sugerir, en determinados casos, métodos de cálculo interesantes. Recuérdese, a título de ejemplo, las posibilidades en Ingeniería inherentes al "Análisis Dimensional" y la gran cantidad de información que se obtiene a partir de los muchísimos "Números Adimensionales" que se utilizan en Ingeniería.

• En el manejo de las magnitudes vectoriales es necesario emplear con rigor el cálculo vectorial recordando que:

- Puede facilitarse mucho el proceso si se tiene cierta intuición al elegir los sistemas de referencia más idóneos para representar el problema vectorial en estudio; ya que por poner ejemplos, en ciertos casos, será conveniente emplear sistemas de coordenadas cartesianas o, en otros, podría interesar elegir sistemas de coordenadas polares o, en unos terceros, lo más correcto sería acudir a sistemas de coordenadas esféricas.

- A veces, incluso, se simplifican mucho las relaciones entre vectores simplemente, transformándolas en relaciones entre escalares si se utiliza la manera analítica o algebraica para representar los vectores involucrados en el problema a resolver.

• Los tensores constituyen una herramienta muy cómoda para relacionar los estados físicos en los medios continuos y su empleo resulta muy eficaz para conceptualizar leyes físicas cuantitativas generales, cualquiera que sea el número de dimensiones a utilizar para la ubicación de los eventos en dichos medios continuos. Por otro lado, las operaciones con tensores ofrecen posibilidades muy difíciles de encontrar en el Álgebra Ordinaria o en el Cálculo Vectorial, operaciones que no presentan mayor dificultad trabajando con tensores; ya que, una vez captada la idea para el empleo de los índices, el Cálculo Tensorial es relativamente sencillo, proporciona interesantes controles para evitar errores y sugiere algoritmos que pueden facilitar, ciertamente, los procesos de cálculo a emplear.

En la segunda parte de este largo artículo insistiremos en que, gracias a la genialidad de Einstein y a los medios proporcionados por el Cálculo Tensorial, pudo superarse la crisis científica asociada al descubrimiento de la constancia de la velocidad de la luz para distintos observadores, independientemente del movimiento relativo entre ellos, y sus consecuencias inmediatas: **la Teoría de la Relatividad.** ▮