

**Esto no es un juego de billar ortogonal porque no sirve para resolver ecuaciones, y si no, vean...**

## El juego de billar ortogonal

**Palabras clave:** Papiroflexia, ecuación, Huzita, R. Lang.

**Key words:** Origami, equation, Huzita, R. Lang, J. Justin.

### Resumen:

Plegando papel resolvemos problemas que se resisten a la Geometría Euclídea. Hasta hace poco, esos plegados se presentaban con cero grados de libertad (un punto sobre un punto, una recta sobre otra); con un grado de libertad (la variable independiente en la ecuación de la recta sobre la que ha de plegarse un punto exterior a ella), etc. La línea de plegado se obtenía a priori con herramientas geométricas convencionales (mediatriz, paralela media, etc.).

El proceso de H. Huzita que veremos exige una nueva herramienta: la de los lugares geométricos. La emplearemos, junto con el plegado, para resolver una ecuación completa de tercer grado.

### Abstract

*Paperfolding copes with problems that Euclidean Geometry can't. Till recently, those foldings occurred with zero degrees of freedom (one point upon another, a straight line on another line); with one degree of freedom (the independent variable in the equation of a line upon which a point outside it must be folded), etc. The folding crease was obtained a priori by means of conventional tools (perpendicular bisector, mid parallel, etc).*

*The process by H. Huzita which will be dealt with here requires a new tool: that of the geometric loci. We shall use it, in connection with folding, to solve a complete third degree equation.*



**Jesús de la Peña Hernández**

Dr. Ingeniero del ICAI, Promoción 1955. Es Vicepresidente de los Comités de Inventiva y Creatividad, y del de Terminología en el IIE. Tiene publicados varios libros sobre Calidad, Fiabilidad, Metrología, Papiroflexia y Matemáticas (algunos de ellos en inglés).

## Fundamento del juego de billar ortogonal

Este juego es una ingeniosa hipótesis original de Humiaki Huzita inspirada en el billar convencional. H.H. es un matemático japonés que se trasladó a Italia para estudiar física nuclear en la Universidad de Pisa. Tiene en común con mi amigo, el californiano Robert Lang, el haberse “desbordado” desde la Física a la Papiroflexia.

H.H. formuló los 6 Axiomas de la matemática papirofléctica; el añadido Postulado nº 7 se debe a Koshiro Hatori, Jacques Justin y Robert Lang.

El juego de billar ortogonal, fundado en el Axioma nº 6, se enuncia así:

Dados en el plano del papel dos puntos  $P_1$  y  $P_2$  y dos rectas  $l_1$  y  $l_2$  se puede ejecutar una línea de plegado de forma que lleve, **simultáneamente**, el punto  $P_1$  sobre  $l_1$  y el  $P_2$  sobre  $l_2$ .

La hipótesis consiste en que, contra lo que ocurre en el billar convencional (Figura 1: ángulo de incidencia igual a ángulo de reflexión), en el billar ortogonal la reflexión de la bola al incidir sobre la banda se produce según un ángulo recto con la dirección incidente (Figura 2).

La hipótesis de H.H. resulta muy útil para resolver problemas de una gran variedad, tanto geométricos como algebraicos. Entre los primeros cabe citar la trisección de un ángulo o el dibujo de un heptágono regular convexo. Aquí, sin embargo me voy a fijar en una aplicación algebraica. Veamos primero cómo se comportan las bolas blanca y roja del billar en cada una de las dos siguientes condiciones.

En el *billar ortogonal* puede haber una, dos o ninguna solución, según que el arco capaz de  $90^\circ$  sobre BR sea tangente a la banda, sea secante, o no llegue a ella. En la Figura 3 se ve el caso de dos soluciones.

## Jugada a dos bandas

Teniendo las bolas B, R se trata de encontrar la trayectoria de B a R después de golpear las dos bandas. (Figura 4).

La solución se obtiene (Figura 5):

- Trazando  $X'$  e  $Y'$  paralelas a las bandas por C y U, los simétricos de B y R respecto de dichas bandas.
- Plegando **simultáneamente** B sobre  $X'$  (produce A) y R sobre  $Y'$  (produce

T). Se trata de una doble simultaneidad (dos puntos sobre dos rectas).

- La línea (discontinua) de plegado en valle DS determina el tramo medio del trayecto de B a R.

- Como esa línea de plegado es eje de simetría y la banda por D es paralela media del  $\Delta ABC$ , el ángulo recto en D se asienta en esa banda horizontal.

Otro tanto puede decirse del  $\Delta RTU$  y la paralela por S a TU.

## Jugada a cuatro bandas (billar ortogonal)

Jugar a cuatro bandas con el billar ortogonal equivale a inscribir otro rectángulo en el rectángulo de las bandas. La simulación consistiría en poner una

Figura 1.

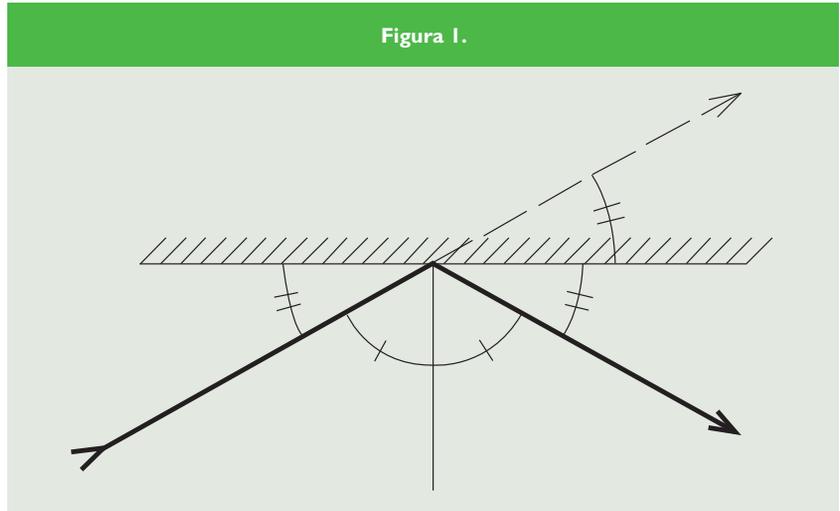


Figura 2.

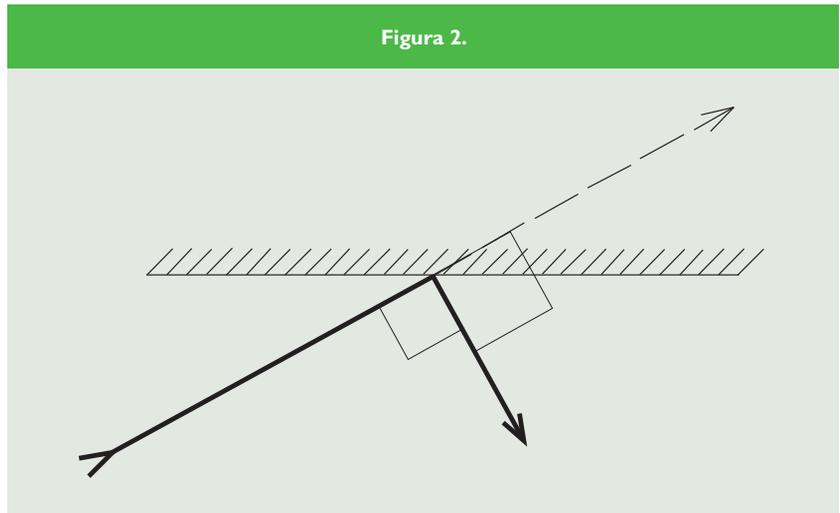


Figura 3.

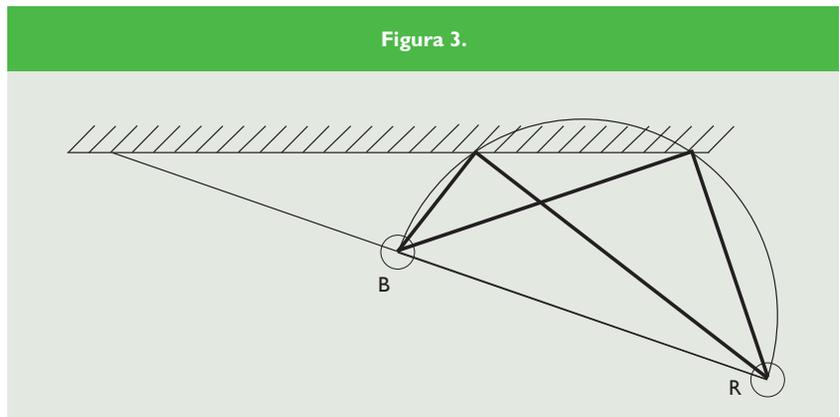
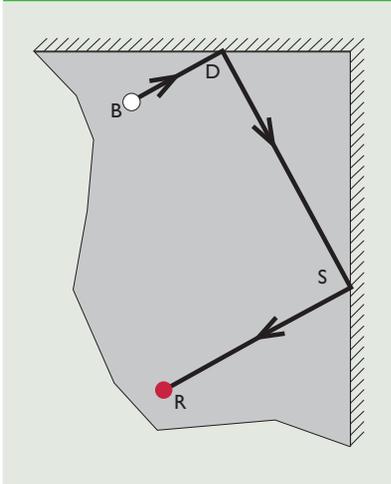


Figura 4.



bola en cualquier punto de la mesa e impulsarla con el taco para que, en su camino ortogonalizado chocara con otra bola situada en el mismo lugar que ocupaba la impulsada.

Es decir, se trata de inscribir en el rectángulo de las bandas, otro que pase por un punto cualquiera del interior de la superficie verde.

Mariano Nieto reduce esta situación a la de las figuras 4 y 5 porque el rectángulo inscrito ha de ser concéntrico con el exterior de las bandas y por tanto dicho rectángulo inscrito ha de contener también al punto simétrico del punto dado, respecto de ese centro común. La Figura 6 resuelve el problema como si se tratara de la Figura 5, pero recordando que aquella Figura 5 lo único que hace es dar fe de lo que se obtuvo con el tanteo plegatorio, pero no produce la solución. Ésta la da CABRI (Programa de los Lugares Geométricos), como veremos a continuación.

Sea el punto B en la mesa que produce su simétrico R respecto del centro del rectángulo de las cuatro bandas.

Obtenemos los simétricos de B respecto de la banda superior y de R respecto de la banda derecha. Por estos puntos simétricos hacemos pasar sendas paralelas a las bandas correspondientes.

Por B trazamos cuatro ángulos rectos con sus vértices en la banda superior:

Sucesivamente obtenemos los cuatro puntos simétricos de R respecto de cada lado emergente de aquellos ángulos rectos.

Por ejemplo, el lado emergente del primer ángulo recto es la mediatriz de  $RR_1$  siendo  $R_1$  el primero de los cuatro puntos simétricos de R.

Trazamos la curva Spline que une los cuatro puntos simétricos (cuatro pequeños círculos) y que corta en  $R'$  a la vertical derecha. La mediatriz de  $RR'$  (de trazos) es la línea de plegado buscada.

*Comprobación:* Al plegar, B cae sobre  $B'$  (en la horizontal superior) y R sobre  $R'$  (en la vertical derecha) formándose el trapecio isósceles  $BB'R'R$  que a mí me gusta llamar de J. Justin.

Los plegados restantes para conseguir el rectángulo inscrito son inmediatos.

Está claro que, aunque antes cito el Programa CABRI, yo no lo he usado al no disponer de él. Lo que he hecho es generar suficientes puntos mediante Auto Cad para producir la SPLINE correspondiente (Línea de Segmentación Polinómica, con interpolación

cúbica) que es el lugar geométrico de los puntos  $R_i$ .

### Resolución de la ecuación completa de tercer grado

Antes de nada, vamos a fijarnos en la Figura 5 para mostrar cómo en su configuración subyace la ecuación de tercer grado. Esa figura se completa ahora con la siguiente Figura 7 de la que se deducen los valores de  $t$  que se muestran a su derecha (tomados valores absolutos).

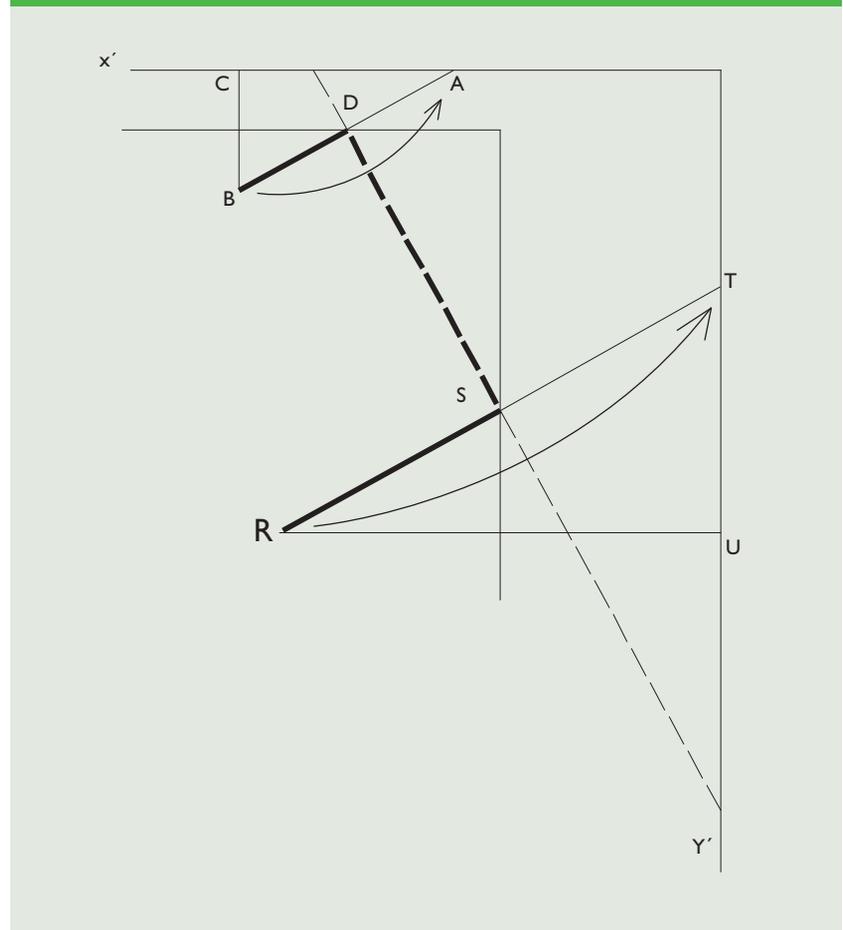
Vamos a obtener una expresión en  $t$  dependiente sólo de las coordenadas de las bolas  $(0, 0)$ ;  $(l, m)$ , del ángulo de ataque  $\alpha$  (cuya tangente es  $t$ ), y de la relación mesa-bolas  $(a, b)$ :

$$bt + ty = a - \frac{b}{t};$$

$$\frac{at - b - bt^2}{t^2} = m - at + lt$$

$$(l - a)t^3 + (m + b)t^2 - at + b = 0$$

Figura 5.



Es decir, la orientación que ha de darse a la bola situada en el origen para que dé en la bola situada en  $(l, m)$  después de rebotar ortogonalmente sobre ambas bandas, es la raíz real única de la ecuación de tercer grado que hemos obtenido. Ello se debe a que, para las dimensiones representadas en el dibujo, la ecuación tiene su discriminante positivo.

Es importante insistir en que las dos rectas receptoras en el plegado **simultáneo** de los puntos Inicio  $(0, 0)$  y Fin  $(l, m)$  están situadas respecto de las bandas (donde se produce la incidencia de la bola activa) a la misma distancia  $a$  que se encuentran de ellas dichos puntos.

Vamos ya a obtener las tres raíces de una ecuación completa de tercer grado. La expresión está pensada para que su resolución por plegados *quepa* dentro del papel. Será ésta:

$$t^3 + t^2 - 2t - 1 = 0$$

La secuencia de vectores, según coeficientes, será:  $1; 1; -2; -1$  (Figura 8).

El primer vector con Inicio en  $I$  (y valor  $1$  como el coeficiente de  $t^3$ ) *incide sobre la banda  $Y$*  de manera que exige la línea  $Y'$  para que sobre ella se asiente  $I$  en el plegado final.

El segundo vector (valor  $1$  como el coeficiente de  $t^2$ ) se produce *girando a la derecha* al finalizar el primer vector (no ha habido cambio de signo al pasar del primero al segundo término de la ecuación).

El tercer vector acusa un giro a la izquierda (hay cambio de signo en el paso del segundo al tercer término de la ecuación) y tiene valor  $2$ , como el coeficiente del tercer término en  $t$ .

Como al pasar del tercero al cuarto término de la ecuación no hay cambio de signo, el giro es a la derecha para producir el último vector (valor  $1$ , el del término independiente) que termina en  $F$ , el punto Final.

Este último vector *viene rebotado de la banda  $x$*  y exige, por tanto, la línea  $X'$  para asentar sobre ella  $F$  en el plegado ulterior. Así pues, habrá de hacerse el siguiente plegado *simultáneo*:

$$I \rightarrow Y' ; F \rightarrow X'$$

Figura 6.

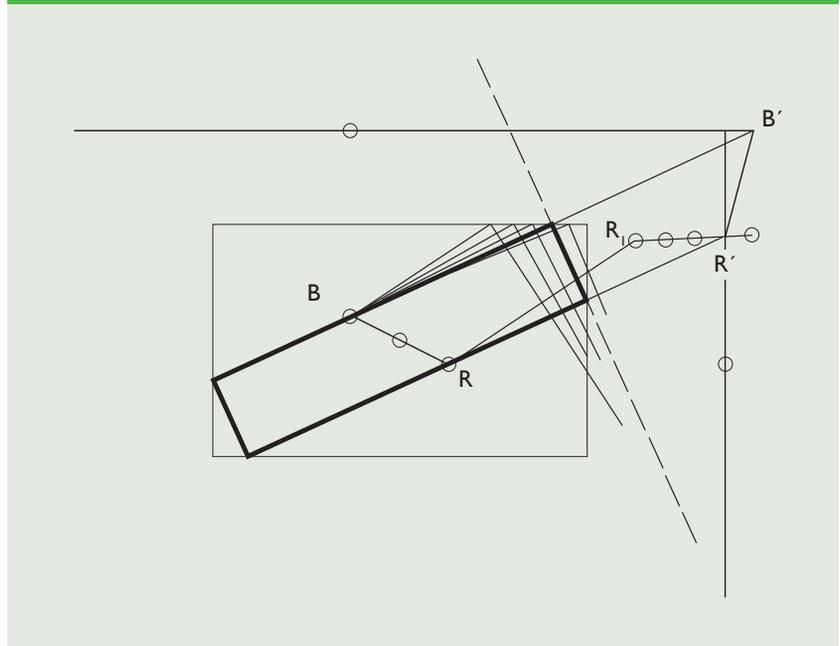


Figura 7.

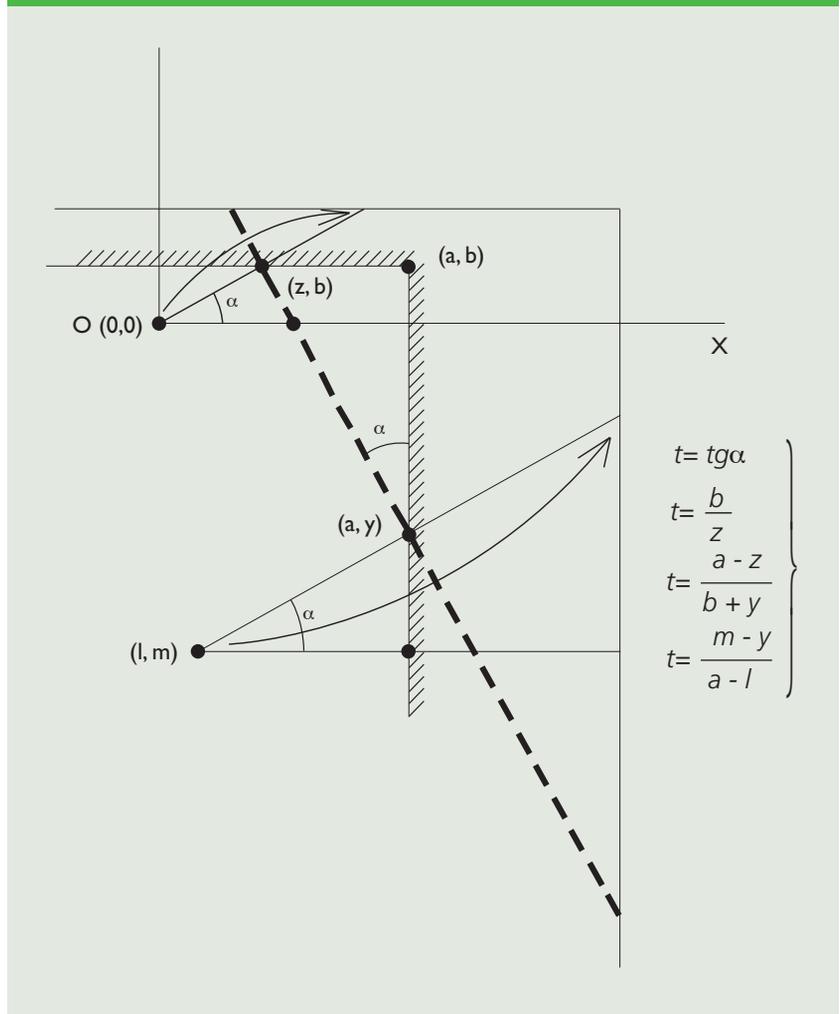
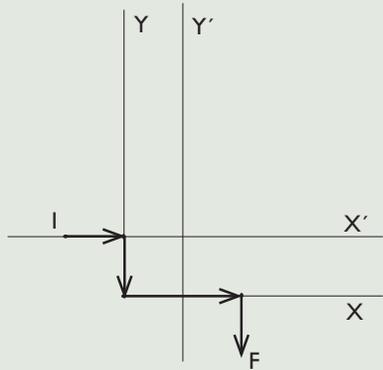


Figura 8.



Lo que ocurre es que este plegado puede hacerse de tres formas distintas dando lugar a la Figura 10.

En ella, las líneas de trazo representan los plegados en valle, y los ángulos  $\alpha$ ,  $\beta$  y  $\gamma$  conducen a las soluciones de la ecuación.

$$\begin{aligned} \alpha &= 51,2721^\circ \\ \beta &= -23,9909 \\ \gamma &= -60,9719 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} t_1 &= \operatorname{tg} \alpha = 1,2469 \\ t_2 &= \operatorname{tg} \beta = -0,4450 \\ t_3 &= \operatorname{tg} \gamma = -1,8019 \end{aligned}$$

Cualquiera de ellas satisface la ecuación  $t^3 + t^2 - 2t - 1 = 0$

Justificación de que la Figura 8 se asocia a la ecuación de tercer grado propuesta (Figura 9):

En los  $\triangle IBD$ ;  $\triangle EGF$  que son semejantes, se tiene:

$$\frac{BD}{ID} = \frac{FG}{GE} ; \frac{BD}{2} = \frac{2}{ED-1} \quad (1)$$

En los  $\triangle IBC$ ;  $\triangle CEF$ , también semejantes:

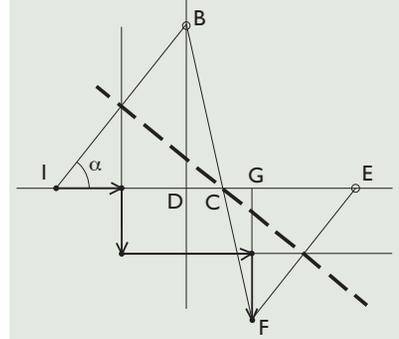
$$\frac{EC}{GF} = \frac{IC}{BD} ; \frac{ED-CD}{2} = \frac{2+CD}{BD} \quad (2)$$

Igualando  $\frac{BD}{2}$  en (1) y (2):

$$\frac{2}{ED-1} = \frac{2+CD}{ED-CD} ; CD = \frac{2}{ED+1} \quad (3)$$

En el  $\triangle IBC$  se tiene también (al ser  $t = \operatorname{tg} \alpha$ ):

Figura 9.



$$\begin{aligned} BD &= ID \operatorname{tg} \alpha = 2t; \\ \text{Ang. BCI} &= 180 - 2\alpha; \\ BD &= DC \operatorname{tg} (180 - \alpha) \end{aligned}$$

Luego:

$$2t = -DC \tan 2\alpha = \frac{2DC \tan \alpha}{\tan^2 \alpha - 1} ;$$

$$t^2 - 1 = DC \quad (4)$$

En el  $\triangle EGF$ , Ang. FEG =  $\alpha$ , luego:

$$t = \frac{GF}{GE} ; t = \frac{2}{ED-1} \quad (5)$$

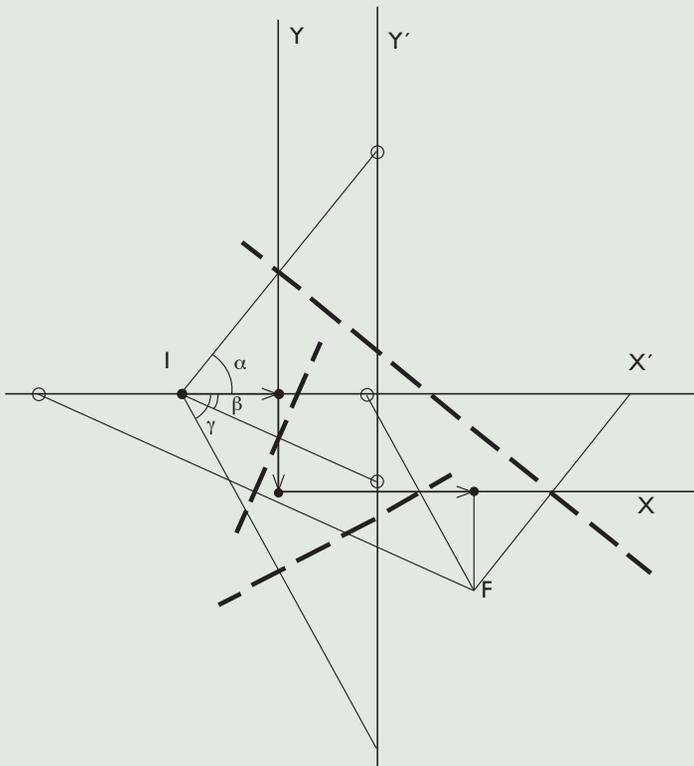
Las expresiones (3), (4), (5) constituyen un sistema paramétrico en  $t$  que permite obtener la ecuación de tercer grado que buscamos.

$$\left. \begin{aligned} t^2 - 1 &= \frac{2}{ED+1} ; ED+1 = \frac{2}{t^2-1} \\ ED-1 &= \frac{2}{t} \end{aligned} \right\}$$

$$2 = \frac{2}{t^2-1} - \frac{2}{t} ; (t^2-1)t = t - (t^2-1)$$

$$(t^2-1)(t+1) = t ; t^3 - t + t^2 - 1 = t ; t^3 + t^2 - 2t - 1 = 0.$$

Figura 10.



### Bibliografía

Origami Science & Art. Proceedings of the Second International Meeting of Origami Science and Scientific Origami. Otsu, Japan. Nov-Dic 1994.

Matemáticas y Papiroflexia. [www.caprichos-ingenieros.com](http://www.caprichos-ingenieros.com)