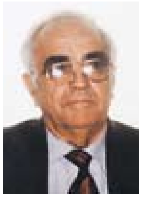
El espacio-tiempo de Einstein

"El espacio por sí mismo y el tiempo por sí mismo están condenados a desvanecerse hasta convertirse en meras sombras y sólo algún tipo de unión de ambos preservará la existencia de una realidad independiente"

(Minkowski)



Luis García Pascual

Doctor Ingeniero Electromecánico del ICAI, Promoción 1957. Diplomado en Organización Industrial. Profesor Emérito de la Escuela Técnica Superior de Ingeniería del ICAI (Universidad Pontificia Comillas de Madrid).

Palabras clave: Espacio-tiempo, contracción del espacio, dilatación del tiempo, espacio propio, tiempo propio, vida propia, relatividad del envejecimiento.

Resumen

A partir de la aparición en escena de la Teoría de la Relatividad Especial en 1905 podemos decir en palabras de Minkowski que **"el espacio que se mide y el tiempo que se mide sólo tienen sentido en el sistema de referencia en que se miden"** y, en consecuencia, los posibles valores que caractericen por ejemplo el desplazamiento de un móvil o su velocidad o su aceleración en un sistema de referencia determinado, no tendrán validez al pretender utilizarlos en otro sistema de referencia que tenga algún movimiento relativo respecto al primero. Ello lleva implícito que, para estudiar cualquier acontecimiento en el espacio o en el tiempo o en ambos a la vez, debamos utilizar tantas ecuaciones distintas como diferentes sean los sistemas de referencia en que nos interese estudiarlo. El espacio-tiempo supera esta dificultad considerando que no deben determinarse los valores del espacio por un lado y del tiempo por otro sino que deberíamos utilizar una nueva variable **s (el espacio-tiempo)** y empleando esa nueva variable, que implica ambos conceptos de forma inseparable, es posible manejar una ecuación que resultará invariante para representar cualquier acontecimiento en los posibles sistemas de referencia. Definir la nueva variable **s**, sus características y formular en el espacio-tiempo algunos conceptos muy cercanos en nuestras experiencias cotidianas es la pretensión de este artículo.

Key words: Space-Time, space contraction, time expansion, own space, own time, own life, ageing.

Abstract

*From the moment the Theory of Special Relativity appeared on the scene, using Minkowski's words that "**the space that is measured and the time that is measured only have meaning within the system of reference in which they are measured",** in consequence we can say that the possible values which, for instance, characterize the displacement, speed or acceleration of a mobile in a specific system of reference, will not be valid when wanting to use them in another system of reference which has a relative movement in respect of the first one. This implies that, in order to study any event in space or in time or in both at the same time, as many different equations must be used as there are different systems of reference in which we wish to study it. The **space-time** overcomes this difficulty by considering that the values of space and time should not be taken separately and instead a new variable **s (space-time)** should be used. By handling this variable which implies both concepts at the same time, it is possible to use an equation to represent any event in all the possible systems of reference. To define this new variable **s** and its characteristics, as well as to formulate in space-time some neighbouring concepts from our daily experience, is the purpose of his article.*

Definición

El **espacio-tiempo** es la identidad geométrica de cuatro dimensiones de las que tres son espaciales **(x, y, z)** y una temporal **(t)** y en la que, de acuerdo con la Teoría de la Relatividad, se desarrollan todos los sucesos del Universo.

Después de la interpretación relativista de la gravedad puede considerarse el espacio-tiempo también como el tejido (la estructura) que, además, soporta todo el comportamiento del Universo.

Introducción

Hasta que Einstein en 1905 postuló su Teoría de la Relatividad Especial, la mecánica, para el estudio del movimiento de los cuerpos, se apoyada fundamentalmente en Galileo y en Newton y aplicaba, con resultados aparentemente irreprochables, ciertas leyes que sucesivamente se habían venido consolidando. En estas leyes siempre se consideraba que tales movimientos tenían lugar en un espacio de tres dimensiones ortogonales **(x, y, z)** y a lo largo de un tiempo de una sola dimensión **(t)** con el convencimiento, más o menos explícito, de que tanto este tiempo como aquel espacio eran variables independientes y de que a ambas se les podían asignar los valores determinados por un observador cualquiera, puesto que estos valores se presumían válidos no sólo para el observador que los hubiera medido sino también para cualquier otro, que deseara utilizarlos, independientemente del movimiento relativo que pudiera haber entre cualesquiera de dichos observadores. Einstein, partiendo del hecho, ampliamente constatado desde las experiencias de Michelson-Morley, de que la velocidad absoluta de la luz es independiente de cual sea la velocidad del foco emisor del que parta y del movimiento del observador que pretenda medirla, cuestionó la invariabilidad de los valores para los intervalos en el tiempo y para las distancias en el espacio percibidos por los distintos observadores y estableció que el correcto estudio del movimiento de los cuerpos exigía pensar que:

a. Las leyes físicas establecidas eran efectivamente válidas para cualquier observador, siempre que dicho observador se encontrara en reposo o se moviera con movimiento rectilíneo y a velocidad constante. Ello equivalía a decir que un observador, si está completamente aislado del exterior, es incapaz de distinguir, aplicando cualquier ley física, si está en reposo o si se mueve con movimiento rectilíneo y a velocidad constante.

b. A pesar de esta validez de las leyes físicas para un observador que esté en reposo o que se desplace con movimiento rectilíneo y uniforme, surgía una discrepancia importante a la hora de considerar los valores del tiempo empleado y del espacio recorrido en un movimiento; ya que, tanto el valor de los intervalos de tiempo medido por los diferentes observadores como el de las distancias constatadas por cada uno de ellos, no son independientes de su movimiento relativo, aunque éste sea rectilíneo y uniforme. Ello quiere decir que es preciso olvidarse de la visión tradicional del tiempo y del espacio como estructuras rígidas del Universo sino que hay que tener en cuenta que los valores de ambas magnitudes dependen del movimiento relativo entre el observador y lo observado.

c. También puntualizó que dos observadores, que se mantengan en puntos distintos de un sistema moviéndose todo él con cierta aceleración no ortogonal a la dirección determinada por los dos puntos en que se encuentren los dos observadores, perciben con valores diferentes tanto el tiempo como el espacio correspondientes a un acontecimiento cualquiera; ya que la aceleración del sistema hace que, durante el pequeño tiempo que tarda la luz en llegar de un observador al otro, la velocidad relativa respecto al acontecimiento del segundo observador no coincida con la velocidad relativa con que el primero de dichos observadores lo haya visto en un momento anterior. Por ejemplo, si en una nave espacial hay un observador en la parte delantera y otro en la parte trasera, cada uno con su reloj correspondiente, constatarán que sus relojes no marchan al unísono mientras la nave se acelere o se retenga porque hay un cambio en la velocidad de la nave desde que se registró el tiempo en uno de los relojes hasta que se registra en el otro.

d. De la misma manera puso de manifiesto que la masa y la energía no son magnitudes independientes. Están relacionadas como si la masa fuese una energía altísimamente condensada con un factor de condensación de gran valor (este valor está determinado por la velocidad de la luz elevada al cuadrado $c^2 = 9.10^{16}$ m^2/seg^2). Ello equivale a decir que la masa puede transformarse en energía y ésta en aquella con el resultado, por ejemplo, de que una pequeña disminución de la cantidad de masa total en una reacción nuclear de origen a una enorme cantidad de energía liberada. **Un gramo** de masa equivale a **9.10^{13} julios** de energía.

e. Idénticamente también constató que la masa de un cuerpo es función de su velocidad de tal manera que, si su velocidad tendiera a la velocidad de la luz, su masa tendería a valer infinito.

f. Dedujo también como recopilación de las premisas anteriores la más importante de las ecuaciones formuladas a lo largo de todo el siglo XX (la famosa ecuación de Einstein $E = m.c^2$).

A partir del **Principio de Equivalencia** *(no es posible distinguir si un cuerpo se mueve con aceleración constante o si está sometido a los efectos de la gravedad o de otra fuerza exterior)* Einstein profundizó en su Teoría de la Relatividad General poniendo de manifiesto que:

g. Un individuo en el interior de un ascensor que descendiera con una aceleración exactamente igual a **g**, si está el individuo completamente aislado del exterior, será incapaz de distinguir si el ascensor se mueve con dicha aceleración o si está en reposo y ha desaparecido, por arte de magia, la acción de la gravedad (lo único que detecta es que ha desaparecido totalmente la fuerza igual a su peso con que sus pies se apoyaban sobre el suelo del ascensor).

Igualmente, si subiera el ascensor con una aceleración de valor **g**, no será capaz de distinguir si el ascensor sube con dicha aceleración o si está en reposo y el campo gravitatorio ha multiplicado por **2** su valor (simplemente nota que sus pies se apoyan, ahora, sobre el suelo del ascensor con una fuerza de valor **2** veces su propio peso). En tercer lugar, y por seguir insistiendo en el mismo ejemplo, si consiguiéramos mediante alguna acción exterior que nuestro ascensor bajara con una aceleración de valor **2g** nuestro ascensorista se sentirá incapacitado para saber si el ascensor baja con dicha aceleración o si está en reposo y el campo gravitatorio, conservando su valor, ha cambiado de sentido (es ahora su cabeza la que se apoya sobre el techo del ascensor con una fuerza igual a su peso).

h. Supongamos, por un momento, que nuestro amigo del ascensor se instalara en el interior de un tubo cilíndrico de acero con los pies posando sobre su fondo y su espalda apoyada contra la pared lateral del cilindro y supongamos también que éste comenzara a girar alrededor de su eje. Nuestro amigo empezaría a notar una presión sobre su espalda y, si estuviera aislado del exterior, llegaría a dudar si estaba girando solidariamente con el tubo o si estaba en reposo y desde la pared interior del mismo se aplicaba sobre su espalda una fuerza de valor:

$$m\omega^2 r$$

Siendo:

m la masa de nuestro compañero en el experimento.

ω la velocidad angular con que gira al unísono con el tubo.

r el radio interior del mismo.

i. En los casos g estamos hablando de cierta masa que, con frecuencia, se ha considerado como **masa gravitacional** y en el ejemplo h de la masa que, a veces, se ha llamado **masa inercial** pudiendo constatar que ambas son la misma cosa y que nunca ningún experimento será capaz de distinguirlas entre sí.

j. Por otra parte sabemos, por geometría elemental, que la relación entre el perímetro interior del tubo y su radio vale:

$$\frac{P}{r} = 2\pi$$

Si una vez girando el tubo pudiésemos saber exactamente, por un lado el valor percibido por nuestro amigo instalado en el tubo para el perímetro interior del mismo y por otro el valor para su radio, ambos valores serían tales que su relación dejaría de ser igual a 2π. La razón hay que buscarla en que el radio del tubo, cuando gira, tiene un movimiento relativo, respecto a cuando estaba parado, ortogonal a dicho radio; mientras que, en el perímetro, la dirección del movimiento relativo, cuando gira, respecto a cuando estaba parado, es tangente al cilindro y, por lo tanto, coinciden en dirección el movimiento relativo y el espacio a medir. La Teoría de la Relatividad Especial nos descubre que, cuando existe movimiento relativo entre dos espacios, se produce, al comparar los valores percibidos por un observador para dichos espacios, una **contracción** del uno respecto al otro en la dirección del movimiento relativo y dicha **contracción** es nula en la dirección ortogonal a dicho movimiento relativo.

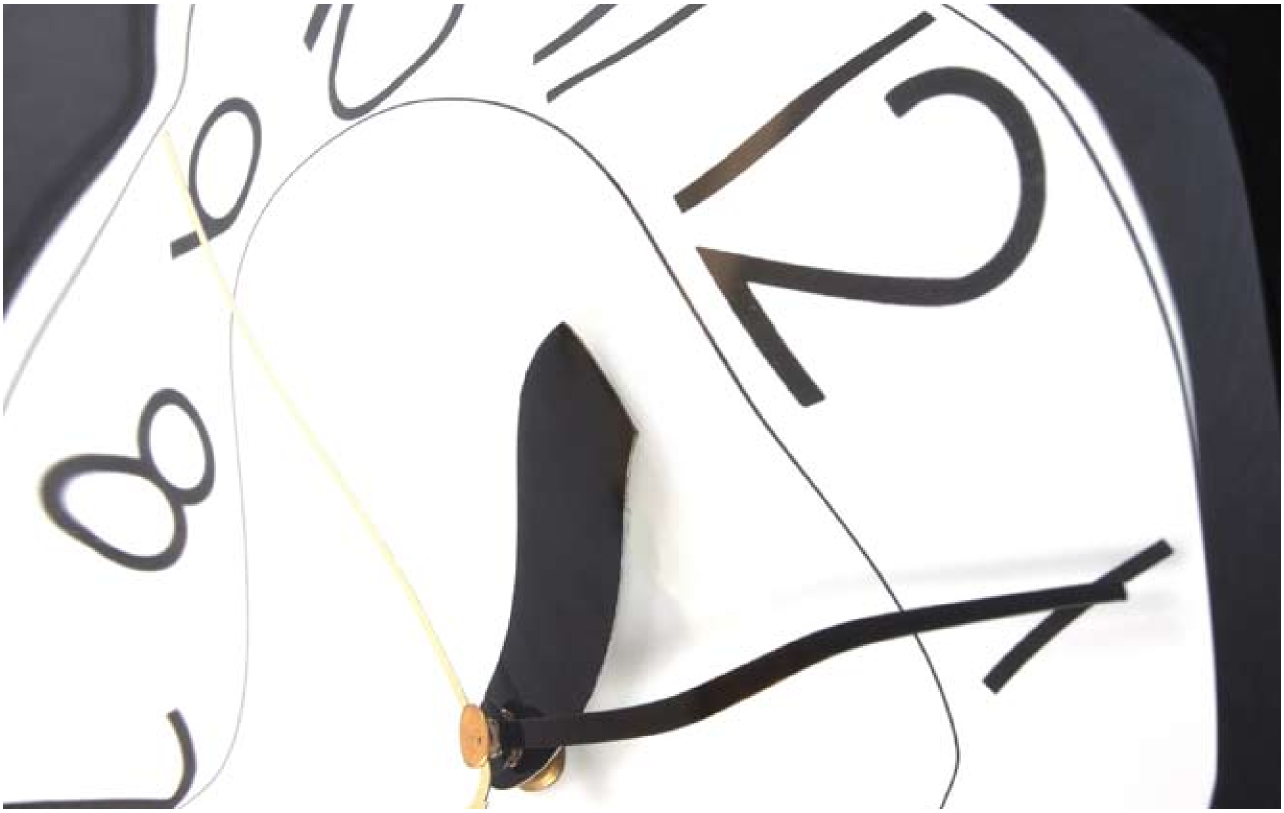
k. Por la equivalencia entre que un sistema tenga un movimiento con aceleración constante o que el mismo esté sometido a un campo gravitatorio constante y uniforme, dos relojes exactamente iguales, situados uno en lo más alto de una torre y otro al pie de la misma, no marcarán exactamente el mismo intervalo de tiempo entre dos hechos concretos; ya que, en la dirección determinada por los dos puntos en que situamos ambos relojes, está actuando el campo gravitatorio terrestre y para un observador aislado del exterior el campo gravitatorio equivale a un movimiento acelerado.

Con todas estas matizaciones Einstein puntualizó la manera como realmente se le presentan, a cada uno de los posibles observadores, los valores del espacio y del tiempo de cualquier movimiento que se pretenda analizar. En este análisis, la mecánica no puede estudiar el movimiento de los cuerpos en el espacio tridimensional rígido de nuestros clásicos en función del tiempo, medidos ambos por cualquier observador, sino que, por estar interrelacionados el paso del tiempo, el espacio recorrido y el movimiento del observador, es necesario utilizar una nueva entidad, función de las tres dimensiones espaciales **(x, y, z)** y de la dimensión temporal **(t)**, cuyos valores para cada observador serán función del movimiento en estudio y del movimiento relativo entre el observador y aquello cuyo movimiento trate de comprender; es decir, en un medio de cuatro dimensiones **(t, x, y, z)** tal que en los valores de cada una de estas cuatro dimensiones esté implícito también el movimiento relativo entre el sujeto que pretenda conocer el movimiento y el objeto cuyo movimiento trate de analizar. En este sentido, el tiempo viene a ser una dimensión más del Universo que, como veremos al estudiar con más rigor el problema, siempre vendrá multiplicado por el valor constante de la velocidad de la luz **(c)**, lo que lleva consigo que el tiempo quede asimilado a una variable espacial más. Es evidente que, según esta asimilación, **1 segundo** equivale a **3.10^8 metros.**

De todo esto deducimos la necesaria existencia, como preconizó Minkowski, de una nueva identidad geométrica en la que, para cada uno de los observadores, tienen lugar los movimientos, identidad que vendrá definida por un vector **s** tal que:

$$s = f(ct, x, y, z)$$

que, desde Einstein, se conoce como **espacio-tiempo.** De la relación distinta a 2π entre el perímetro y el radio del tubo de acero, que aparece en uno de los ejemplos anteriores, ya inferimos, y como tendremos ocasión de comprobar más tarde, que este **espacio-tiempo** es ciertamente distinto al **espacio plano** de Euclides que estamos acostumbrados a manejar.



Tampoco es extraño deducir, a partir de estas matizaciones evidenciadas por Einstein, que todo y también cada uno de nosotros no sólo nos desplazamos en aquello que en la vida normal llamamos espacio (las cosas y también los individuos viajamos en el sentido tradicional del término) sino que también nos movemos en aquello que en la vida normal llamamos tiempo (las cosas e idénticamente los individuos envejecemos). Es de observar que ambos hechos (viajar y envejecer) ocurren a la vez y en proporción variable según la relación entre la velocidad a la que viajemos y la velocidad de la luz de tal manera que, si viajáramos a la velocidad de la luz, nos desplazaríamos muchísimo; pero el transcurrir de nuestro tiempo resultaría nulo, nuestro **tiempo propio** sería cero, **no envejeceríamos.** Esta es una de las conclusiones que produjo mayor asombro al divulgarse la Teoría de la Relatividad Especial.

Es evidente que en el cambio que en el vector **s** (en el **espacio-tiempo**) represente un movimiento elemental de cualquier móvil respecto a un observador cualquiera intervendrán no sólo los cambios elementales de las coordenadas espaciales, que en el sentido clásico hemos venido considerando **(dx, dy, dz)**, sino también el cambio elemental de la coordenada temporal **(cdt).**

Algunas características del espacio-tiempo

Introducción

Como ya hemos comentado, la geometría en el **espacio-tiempo** es ciertamente muy distinta a la geometría plana de Euclides que normalmente utilizamos. En ésta si, a título de ejemplo, tomásemos una línea horizontal (representativa del tiempo) partiendo de un punto P_1 y nos desplazáramos a lo largo de ella durante 100 segundos, medidos en un reloj situado a nivel del suelo, llegaríamos a otro punto P_2. Si levantásemos ahora desde este punto a lo largo de una línea vertical (representativa del espacio) una longitud de 100 metros, medidos por el mismo observador, llegaríamos a un nuevo punto P_3. Si, como estamos acostumbrados a pensar, el tiempo y el espacio fueran independientes entre sí, y con los mismos valores para los distintos observadores, llegaríamos al mismo punto P_3 levantando inicialmente los 100 metros desde P_1 y después desplazándonos 100 segundos según una horizontal, medidos en un reloj a 100 metros de altura. Habríamos conseguido un rectángulo perfecto.

Veamos que ocurriría ahora si realizásemos el mismo proceso en el **espacio-tiempo** alumbrado por la Teoría de la Relatividad Especial. Partiendo del mismo punto P_1 nos desplazaríamos, como antes, durante 100 segundos a lo largo de una línea horizontal y medidos en el reloj del observador **O**, situado al nivel del suelo, llegando, evidentemente, al mismo punto P_2 del caso anterior. Si ahora levantásemos una vertical por este punto de 100 metros de longitud (también para el observador **O**) llegaríamos, como antes, al punto P_3; pero pensemos que, si comenzásemos el experimento levantando una línea de 100 metros para el observador **O** a lo largo de la vertical partiendo de P_1, llegaríamos a un punto Q exactamente a la misma altura de P_3; pero si nos desplazásemos ahora 100 segundos (contados por el reloj del observador

o a 100 metros de altura) iríamos a un punto Q_1 a la izquierda de P_3; ya que el reloj, a la altura de 100 metros, va más deprisa que el reloj de **O** al nivel del suelo, como calcularemos más tarde y como ya hemos comentado al hablar de los dos relojes uno en lo alto de una torre y otro al pie de la misma. No llegaríamos, por lo tanto, a cerrar el paralelogramo que deseábamos construir. Esto ocurre porque el **espacio-tiempo** no se comporta como el **espacio plano** euclidiano que estamos acostumbrados a manejar.

El espacio-tiempo es curvo

Consideremos algunas diferencias en el comportamiento de las figuras geométricas en un plano y en una superficie esférica (espacio curvo) citando, a título de ejemplo, las siguientes:

a. En geometría plana los ángulos de un triángulo cualquiera siempre suman dos rectos. La suma de los ángulos de un triángulo sobre una superficie esférica puede variar desde dos rectos (en un triángulo formado por dos meridianos muy próximos y un paralelo que corte a ambos) hasta seis rectos (en un triángulo formado por un meridiano y otro muy próximo a él pero girado casi una vuelta completa –cuatro rectos– alrededor del polo y un paralelo cortando a ambos meridianos).

b. En geometría plana la distancia mínima entre dos puntos A y B es la longitud de la línea recta que pasa por A y B. En geometría esférica la distancia mínima entre dichos puntos es la longitud del arco del círculo máximo que pasa por A y B.

c. En geometría plana la relación entre la longitud de una circunferencia y dos veces el valor de π es el radio de dicha circunferencia. En geometría esférica el radio de la circunferencia que corresponde a un paralelo es la longitud del arco del meridiano desde el polo hasta un punto cualquiera de dicha circunferencia. La longitud de ese radio es siempre mayor que el cociente entre la longitud de la circunferencia y dos veces el valor de π.

d. En geometría plana si, partiendo de un punto A, vamos trazando sucesivamente cuatro rectas perpendiculares entre sí de longitud L y girada cada una respecto a la anterior siempre en el mismo sentido formamos un cuadrado perfecto de lado L y llegamos de nuevo al punto A. En geometría esférica, si hacemos lo mismo a lo largo de cuatro círculos máximos mutuamente perpendiculares entre sí, ni obtenemos un cuadrado perfecto ni llegamos de nuevo al mismo punto A.

Por analogía entre las anomalías observadas al comparar las diferencias en el comportamiento de las figuras geométricas en un espacio plano y en una superficie esférica (espacio curvo) con el comportamiento advertido al relacionar dichas figuras en el **espacio-tiempo** y en un espacio plano decimos que aquel es curvo.

Desarrollo matemático del espacio-tiempo

Pretendemos encontrar la expresión en que aparezcan unidos el espacio y el tiempo dando origen a la unidad superior (el **espacio-tiempo**) que, en el sentir de Minkowski, sería la única válida para que distintos observadores, aunque tengan movimiento relativo entre sí, puedan formular de idéntica manera el desarrollo de los acontecimientos que tienen lugar en el Universo. Para ello vamos a suponer dos observadores **O** y **o** solidarios respectivamente a los espacios **E** (de coordenadas **X,Y,Z**) y **e** (de coordenadas **x, y, z**) entre los que exista un movimiento relativo; vamos a dotar a cada uno de estos dos observadores de su correspondiente reloj $\mathbf{R_O}$ y $\mathbf{r_o}$ y vamos a pensar que, tanto **O** en el espacio **E** como **o** en el espacio **e,** puedan, cada uno desde su atalaya correspondiente, contemplar la evolución de un determinado evento (por ejemplo la propagación de la luz). Es evidente que cualquier acontecimiento se desarrollará, en el sentir de cada observador, a lo largo de un recorrido determinado en su **espacio** respectivo y empleará para ello el tiempo registrado en su respectivo reloj (es obvio pensar que, en determinados acontecimientos concretos, tanto el espacio como el tiempo, para alguno de los observadores, pueden ser nulos). Ya sabemos, por las matizaciones establecidas por Einstein, que ni los desplazamientos medidos por cada observador en su espacio correspondiente ni los tiempos registrados en cada uno de los dos relojes tendrán los mismos valores; puesto que suponemos movimiento relativo entre ellos.

Imaginemos el caso, al que siempre recurrimos, de que tengamos un tren que se mueva con movimiento rectilíneo y uniforme respecto a cualquiera de las estaciones de la vía férrea por la que circule y vamos a considerar como observador **o** un viajero sentado en dicho tren y como observador **O** el jefe de una de las estaciones, por las que pase el tren, sentado en su despacho. Es evidente que el observador móvil se mueve respecto al fijo con una velocidad rectilínea y uniforme de valor:

$$V = \frac{dX + dY + dZ}{dT} \qquad [1]$$

siendo:

X,Y, Z los vectores que representen la posición del viajero **o** respecto al jefe de estación **O.**

T el tiempo medido por el reloj del citado jefe de estación.

Sabemos, desde la ya citada experiencia de Michelson-Morley, que la propagación de la luz tiene las mismas características tanto si es juzgada desde **O** como si es vista desde **o** y vamos a suponer que:

a. Desde un punto $\mathbf{O_S}$ de la estación, cuyas coordenadas respecto a **O** sean $\mathbf{X_S, Y_S, Z_S}$, emitimos, en el instante $\mathbf{T_S}$, un destello de luz que en el instante $\mathbf{T_E}$, por la igualdad de la velocidad de la luz en cualquier dirección, alcanzará para **O** los puntos $\mathbf{X_E, Y_E, Z_E}$ de una esfera de radio $\mathbf{C(T_E-T_S)}$, siendo **C** la velocidad de la luz en la estación y en todos sus alrededores (en el espacio solidario al observador **O**). Por lo tanto, podremos escribir:

$$C^2\left(T_E - T_S\right)^2 - \left(X_E - X_S\right)^2 - \left(Y_E - Y_S\right)^2 - \left(Z_E - Z_S\right)^2 = 0$$

b. El observador **o** sentado en el tren, verá que una luz se emite desde un punto cuyas coordenadas para él son x_s, y_s, z_s, en el instante de su reloj t_s y alcanza en su instante t_e los puntos de una esfera x_e, y_e, z_e de radio $c(t_e-t_s)$ sabiendo que **c** es la velocidad de la luz vista desde el tren. Por lo tanto (en el espacio solidario al observador **o**) ha de cumplirse igualmente que:

$$c^2\left(t_e - t_s\right)^2 - \left(x_e - x_s\right)^2 - \left(y_e - y_s\right)^2 - \left(z_e - z_s\right)^2 = 0$$

Ahora bien, sabemos desde Michelson-Morley que, a pesar de que exista movimiento relativo entre la estación y el tren, se cumple que:

$$C = c$$

Si ambos observadores asignan valores cero a las coordenadas en su espacio y al tiempo en que se inicia la de partida del rayo de luz podremos escribir que:

$$c^2T^2 - X^2 - Y^2 - Z^2 = c^2t^2 - x^2 - y^2 - z^2 \qquad [2]$$

Por lo tanto, y para el caso concreto del estudio de la propagación de la luz tanto analizada por el observador **O** como estudiada por el observador **o**, la igualdad anterior será la interrelación entre los valores de las dos cuaternas **T, X, Y, Z** y **t, x, y, z** correspondientes a las respectivas expresiones del **espacio-tiempo** desde el punto de vista del observador **O** o desde la óptica del observador **o**.

Encontrar la interrelación entre estas ocho variables teniendo una sola ecuación y las únicas condiciones de conocer el valor de la velocidad de la luz **c** y el movimiento relativo **V** entre los dos espacios **E** y **e** no es nada trivial.

Vamos a encontrar una solución a este problema particularizando al caso en que la luz únicamente se propagara en la dirección **X**, coincidente con la dirección **x** y que la velocidad relativa **V** entre los dos espacios **E** y **e**, además de ser constante, fuera paralela a la dirección de **X** y de **x**. En este caso particular, la ecuación **[2]** se convertiría en:

$$X^2 - c^2T^2 = x^2 - c^2t^2 \qquad [3]$$

A partir de esta ecuación determinemos los valores de **x** y de **t** para el observador móvil **o** en función de los valores de **X** y de **T** para el observador **O**, determinación que no es inmediata ya que tenemos una sola ecuación relacionando cuatro variables; no obstante, tenemos otros dos datos (la constancia de la velocidad **c** de la luz y la condición de que entre los dos sistemas de ejes exista una traslación rectilínea, constante y paralela a los dos ejes **X-x** de valor **V**), que nos permitirán superar esta dificultad.

Después de realizar algunos cambios de variables y de realizar una serie de operaciones matemáticas no muy difíciles de desarrollar (el lector interesado puede encontrarlas en un artículo anterior mío en *Anales de Mecánica y Electricidad* –**Aspectos Matemáticos de la Relatividad**–) llegamos a establecer que:

$$x = \frac{X - VT}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} \qquad [4]$$

y que:

$$t = \frac{T - \frac{VX}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} \qquad [5]$$

Evidentemente, si sustituimos **x** y **t** por sus valores en función de **X** y de **T**, obtenidos en elas ecuaciones 4 y 5, la ecuación 3 se convierte, como debía suceder, en una identidad.

Estas relaciones resuelven el problema que nos habíamos planteado y, a partir de ellas, deduciremos fácilmente la c**ontracción en las longitudes** y la **dilatación en los tiempos** apreciados por dos observadores, que tengan entre sí movimiento relativo rectilíneo y uniforme (ambas cosas las utilizaremos más tarde en un ejemplo concreto). En efecto:

a. Si dos puntos de coordenadas X_A y X_B para el observador **O**, están separados la distancia:

$$L = X_A - X_B$$

tales puntos estarán separados para el observador **o** la distancia:

$$l = x_A - x_B$$

y, teniendo en cuenta los valores de **x** en función de **V**, de **T** y de **X** y de **t** en función también de **V**, de **X** y de **T** podemos, mediante algunas operaciones elementales, llegar a la expresión:

$$l = L\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}$$

Que representa la **contracción del espacio** al cambiar de observador. La interpretación de esta contracción del espacio para Lorentz se debía al desplazamiento de las partículas como consecuencia del cambio de movimiento del espacio respecto a cada uno de los observadores; para Einstein, en cambio, se debe a la capacidad del propio espacio para aparecer deformado frente al observador que lo contemple igual que, como veremos a continuación, ocurre con el valor del tiempo ante el fenómeno de su **dilatación** al pasar de ser visto por un observador a ser medido por otro.

b. Si un acontecimiento desarrollado en un punto dado **X** del espacio **E** tiene una duración:

$$T = T_A - T_B$$

Tal duración para el observador **o** valdrá:

$$t = t_A - t_B$$

Y, teniendo en cuenta los valores de **t** en función de **V**, de **X** y de **T**, tendremos:

$$t = \frac{T_A - X\frac{V}{c^2} - T_B + X\frac{V}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} = \frac{T}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}$$

Que, como en el caso anterior, representa la **dilatación del tiempo** al cambiar de observador y se debe a que, como el espacio, para Einstein también el tiempo tiene cierta capacidad para acomodarse a los valores precisos para cumplir con las exigencias del **espacio-tiempo.** Para Lorentz el retardo de los relojes se debía a la necesidad del viajar el tiempo a través del éter, éter que para Einstein ni existe ni tiene ningún sentido.

Volviendo a nuestro empeño por encontrar un desarrollo matemático del **espacio-tiempo** y partiendo, como antes, de un evento inicial de referencia, al que ambos observadores asignen coordenadas espacio-temporales de valor cero, tendremos la ecuación invariante buscada para los dos observadores del **espacio-tiempo.** Efectivamente la ecuación que representará cualquier acontecimiento para el observador **O** tendrá la forma:

$$S^2 = c^2 T^2 - X^2 - Y^2 - Z^2 \quad [6]$$

y, ante otro acontecimiento cualquiera, la ecuación que lo representará en el **espacio-tiempo** del observador **o** será:

$$s^2 = c^2 t^2 - x^2 - y^2 - z^2 \quad [7]$$

Las dos ecuaciones anteriores tienen expresiones completamente idénticas y serán iguales entre sí sólo en el caso de que representen el mismo acontecimiento para los dos observadores, como ocurría cuando estudiábamos la propagación de la luz.

En el caso de que se tratara de dos acontecimientos separados por incrementos elementales y referidos a un origen común, la modificación correspondiente del **espacio-tiempo** para el jefe de estación (observador **O**) sería:

$$dS^2 = c^2 dT^2 - dX^2 - dY^2 - dZ^2 \quad [8]$$

mientras que, para un viajero del tren (observador **o**), su **espacio-tiempo** se modificaría en:

$$ds^2 = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 \quad [9]$$

Conclusiones

De las ecuaciones anteriores es muy fácil sacar conclusiones del tipo de las siguientes:

• Un punto en el **espacio-tiempo** representa un suceso que se dio o que va a producirse en un lugar concreto y, además, en un instante dado.

• Si en el **espacio-tiempo** las variables espaciales son constantes y la variable temporal puede tomar cualquier valor tendremos una **línea temporal,** que viene a representar la sucesión de eventos en un punto a lo largo del tiempo.

• Si en la expresión del **espacio-tiempo t** es constante y no lo son las variables espaciales estamos ante los sucesos simultáneos que pueden darse en los diferentes puntos. Si cortamos el **espacio-tiempo** del observador móvil por el hiperplano **t=constante** tendremos el espacio geométrico euclidiano tridimensional para dicho observador, en el que sabemos que la distancia **dl** entre dos puntos vale;

$$dl^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 \quad [10]$$

• Sabemos que en el **espacio-tiempo** se cumple que:

$$ds^2 = c^2 dt^2 - dl^2 \quad [11]$$

y cuando sea:

$$c^2 dt^2 = dl^2$$

estaremos ante una **línea** con **ds=0** en la que:

$$c = \sqrt{\frac{dl^2}{dt^2}} \quad [12]$$

y, por lo tanto, se tratará de un movimiento rectilíneo y uniforme con la velocidad de propagación de la luz, cosa que ocurre en cualquier onda electromagnética, que podemos considerar, por la dualidad onda-partícula, como formada por fotones que, carentes de masa intrínseca (por eso pueden llegar a moverse a la velocidad de la luz), sólo tienen una energía de valor **h.ν** siendo:

h la constante de Planck de valor
$1{,}05.10^{-34}$ kg.m²/seg
y
ν la frecuencia de la onda en 1/seg

Por ejemplo, el fotón de la luz roja es un paquete de energía (un cuanto en el sentido manejado por la Mecánica Cuántica) de valor:

$$1{,}05.\,10^{-34}.5.10^{14} = 5{,}25.10^{-20} \text{ julios}$$

y que se propaga a la velocidad de la luz.

• También sabemos que nada puede superar la velocidad de la luz, luego si se trata de dos eventos entre los que se transmita información del uno al otro necesariamente:

$$\frac{dl^2}{dt^2} \leq c^2 \quad [13]$$

por lo que ha de ser:

$$c^2 dt^2 \geq dl^2 \quad [14]$$

equivalente a:

$$ds^2 = c^2 dt^2 - dl^2 \geq 0 \quad [15]$$

Por lo tanto, el cuadrado de un elemento de arco en el **espacio-tiempo** no puede ser negativo, ocurriendo que:

a. Si **ds²** fuera mayor que cero estaríamos ante movimientos a velocidades menores que la velocidad de la luz. Un caso particular sería el de las líneas temporales (ya comentadas) en que **dl²=0.**

b. Si **ds²** fuera igual a cero estaríamos ante líneas de longitud nula y, como ya hemos dicho se trataría de la propagación de cualquier señal electromagnética y, entre ellas, de la propagación de la luz.

• También podemos analizar la rapidez con que ambos observadores percibirán que varían en sus respectivos **espacio-tiempo** diversos acontecimientos. Es evidente que:

a. Para el observador **O** la variación con el tiempo de un acontecimiento que se desplaza respecto a **O** con la velocidad **V** será:

$$U = \sqrt{\frac{dS^2}{dT^2}} = \sqrt{\frac{c^2 dT^2 - \left(dX^2 + dY^2 + dZ^2\right)}{dT^2}} =$$

$$= \sqrt{c^2 - V^2} = c\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}} \quad [16]$$

b. Para el observador **o** el mismo acontecimiento (por lo que $ds^2=dS^2$) tendrá lugar con una variación temporal de **s** de valor:

$$u=\sqrt{\frac{ds^2}{dt^2}}=\sqrt{\frac{dS^2}{dt^2}}=$$

$$=\sqrt{\frac{c^2T^2-\left(dX^2+dY^2+dZ^2\right)}{T^2-c^{-2}\left(dX^2+dY^2+dZ^2\right)}}=c$$

[17]

La interpretación física de las expresiones anteriores es ciertamente sencilla. En efecto:

1. Para cualquier observador todo lo que no tiene movimiento relativo respecto a él **(V=0)** varía para él según la constante c (que será únicamente velocidad de envejecimiento).

2. Todo lo que, para cualquier observador, se desplace con una velocidad relativa **V**, tiene para dicho observador una variación temporal que consta de dos componentes:

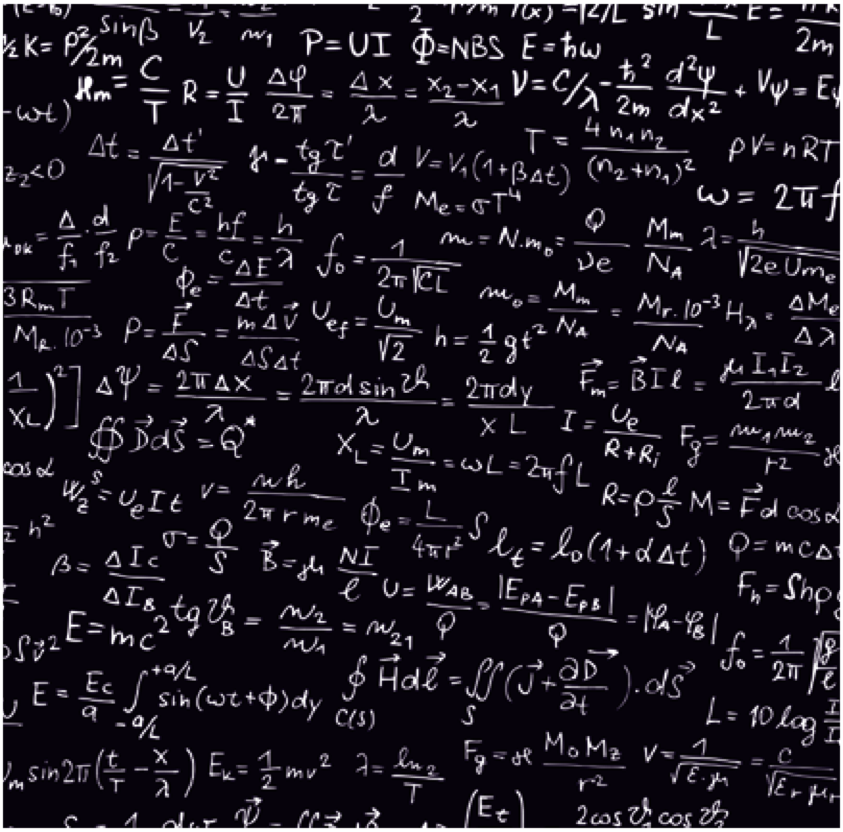
• Una velocidad de desplazamiento espacial de valor $U^2_d = V^2$.
• Una velocidad de envejecimiento de valor $U^2_t = c^2(1-V^2/c^2)$.

La suma de ambas siempre es **U = c** de tal manera que si en un móvil aumenta su velocidad **V** de desplazamiento espacial disminuye su velocidad de envejecimiento.

• Dado que en los sucesos cotidianos de nuestra vida el valor de **V** siempre es muy inferior a **c** la componente más importante de la velocidad es la de envejecimiento. Para que ésta se anulara tendría que ser **V** igual a **c**.

En el caso de una partícula que viajara a velocidades cercanas a la velocidad de la luz a un observador en la Tierra le parecería que dicha partícula envejecería muy despacio (viviría mucho más tiempo que el que corresponde a su vida media comprobada en el laboratorio). Es el caso típico de algunos mesones mu (muones) que se forman en la parte superior de la atmósfera y que, a pesar de su cortísimo tiempo de vida media (unos $2{,}2.\ 10^{-6}$ seg.), han llegado sin desintegrarse a laboratorios en la Tierra. La razón hay que buscarla en que para el observador del laboratorio ha disminuido mucho su velocidad de envejecimiento al viajar para él a una velocidad muy próxima a la velocidad de la luz.

Es evidente que para un observador vinculado a la propia partícula ésta viviría su tiempo normal porque para él la partícula está en reposo.



• Si el tren de nuestro ejemplo estuviera parado en una estación todos sus viajeros se trasladarían con U_d=0 y envejecerían con U_t =**c.** En cambio si se desplazaran con **V=c** sus viajeros se trasladarían con la velocidad de la luz y no envejecerían.

Ejemplo

Vamos estudiar un ejemplo que, por plantearlo bajo hipótesis ciertamente límites, nos llevará a soluciones extremas; pretendemos con ello ayudar a interpretar algunos de los tópicos presentes en los apartados anteriores. Podríamos enunciarlo así: Supongamos el mismo observador fijo **O** de siempre (el jefe de una de las estaciones de nuestro ferrocarril) y utilicemos como observador móvil **o** un observador vinculado a cualquiera de los fotones de la luz que recibimos desde el Sol viajando hacia la Tierra, como ya hemos comentado antes, a la velocidad de la luz **c.** Con estas premisas deseamos conocer las percepciones del viaje de la luz para un observador solidario a dicho fotón y para nuestro observador fijo sentado en una de las estaciones. Percepciones que analizaremos por un lado, con los criterios anteriores a 1905 y por otro, desde la óptica del **espacio-tiempo** sugerida por la Teoría de la Relatividad Especial.

• Antes de 1905 los dos observadores razonarían de la forma siguiente:

El observador **O** que conocía desde niño que la distancia entre el Sol y la Tierra tiene un valor aproximado de **150.000.000 km** y además sabía, por los libros de Física que había leído, que la velocidad de la luz vale aproximadamente **300.000 km/seg** él, con total rotundidad, aseguraría que el fotón que debería recorrer un **espacio** de **150.000.000 km** emplearía un **tiempo** de unos **500 segundos**.

Si ahora le preguntásemos el espacio recorrido y el tiempo empleado en el viaje del fotón al hipotético observador subido en uno de los fotones viajando del Sol a la Tierra y con un reloj en la mano nos diría que su reloj (que funcionaba perfectamente y que él había mirado con total atención) no se había movido en absoluto durante el viaje y, como la velocidad de la luz, aunque muy alta no es infinita, estaba absolutamente convencido de que los fotones recorren en el viaje un **espacio** de **0 km** porque emplean en él un **tiempo** de **0 segundos**.

Antes de 1905 estas discrepancias en cuanto a los valores del **espacio** recorrido y del **tiempo** empleado para los dos observadores no estaban justificadas por la Mecánica de Newton ni por las ecuaciones de la Relatividad de Galileo; ya que éstas, para una velocidad relativa **V** en la dirección **X** coincidente con **x** (que vamos a suponer que sea la dirección del Sol a la Tierra) entre dos sistemas **X, Y, Z** y **x, y, z,** nos vienen a decir que:

a. Los **tiempos** en cada uno de los sistemas son independientes de la velocidad relativa V.

b. A un **ΔX** en el primer sistema le corresponde otro **Δx** en el segundo sistema exactamente del mismo valor.

Y, en este caso, ni los tiempos ni los espacios se conservan al verlos desde uno u otro de los dos observadores.

• Después de haber leído este trabajo la manera de pensar de nuestros observadores sería:

Para el observador **O** su **espacio-tiempo** valdría:

$$S = \sqrt{c^2T^2 - X^2 - Y^2 - Z^2} = 0\text{km}$$

ya que, desde la atalaya del jefe de la estación lo mismo que desde el punto de vista de cualquier habitante de la Tierra, constataría que:

a. La distancia a recorrer por la luz procedente del Sol vale **150.10⁶ km.**

b. La velocidad de la luz valdrá, como siempre y para cualquier observador, **c = 3.10⁵ km/seg.**

c. El tiempo empleado en el recorrido alcanzaría el valor **T = 500 seg.**

d. Sustituyendo valores quedaría **S = 0 Km.**

Para el observador **o** su **espacio-tiempo** valdría:

$$s = \sqrt{c^2t^2 - x^2 - y^2 - z^2} = \\ = \sqrt{0 - 0} = 0\text{km}$$

ya que el observador viajando con el fotón pensaría que él estaba en reposo y que la Tierra se aproximaba hacia él a la velocidad c por lo que:

a. La distancia a recorrer por la luz sería **nula** como consecuencia de la **contracción de longitudes** antes analizada al pasar de observarla desde **O** a observarla desde **o**.

b. La velocidad de la luz también valdría **c=3.10⁵ km/seg.**

c. Es **nulo** el tiempo empleado por la luz para recorrer la **nula** distancia, que **o** se ha desplazado, en su sistema de referencia. Este tiempo **nulo**, visto desde **o**, se convierte en los **500seg** para el observador **O** como consecuencia de la **dilatación de los tiempos** también antes estudiada.

Comprobamos que el valor del **espacio-tiempo** se conserva al cambiar de observador y que, por tratarse de la propagación de la luz, como ocurriría con cualquier otra onda electromagnética, el valor del **espacio-tiempo** para ambos observadores es nulo, de acuerdo con la ecuación **[12].**

Como en este caso el viajero **o** (en un fotón) se desplaza respecto a **O** con una velocidad **V = c**, el jefe de estación lo verá, por la ecuación **[16]**, desplazarse en su **espacio-tiempo** con una velocidad de desplazamiento igual a la de la luz y sin envejecer; pero dicho viajero estará convencidos de que no se ha movido.

Nota. Los valores enormes que aparecen, tanto para la c**ontracción de longitudes** (al pasar de **O** a **o**) como para la dilatación de los tiempos (al pasar de **o** a **O**), se deben a que estamos trabajando con la velocidad relativa límite igual a la velocidad de la luz.

Veamos otro **ejemplo**, que dejamos sin resolver como ejercicio de estudio para el lector, y que podríamos enunciar de la forma siguiente:

Supongamos el observador **O** del ejemplo anterior sentado en su estación, el observador $\mathbf{o_1}$ también del caso anterior subido en su fotón y un tercer observador $\mathbf{o_2}$ montado en un tren que pasara por la estación, donde se encuentra el observador **O**, circulando, respecto a **O** a una velocidad rectilínea y uniforme de valor, evidentemente, muy inferior a c. Encontrar la ecuación del **espacio-tiempo** para cada uno de los tres observadores y las velocidades de desplazamiento y de envejecimiento que percibirán cada uno de los tres observadores ante cualquier evento que tuviera lugar en alguno de los tres espacios considerados.

Para insistir una vez más en la capacidad de adaptación tanto del tiempo como del espacio, en la identidad geométrica **espacio-tiempo,** pongámonos ante otra nueva situación. Supongamos los mismos observadores (el jefe de la estación y el viajero del fotón) y que el jefe de la estación contratara pintar una de las paredes de su estación orientada prácticamente en la dirección en que llega la luz, procedente del Sol, a la estación de nuestro problema. Una vez concluido el trabajo, el pintor sugiere al jefe de la estación que le pague por su trabajo según lo percibido por el viajero cabalgando en el fotón. El jefe de la estación acepta y le envía un fax a nuestro viajero solicitándole información para pagarle al pintor. ¿Cuándo opina que recibiría el jefe de la estación la respuesta del fotón y cuál sería en una primera aproximación el sentido de esta respuesta? ∎